a.a. 2005 - 06
Corso di Laurea in Informatica Multimediale
Esercizi di Analisi Matematica 2
Equazioni differenziali - 2
a cura di Roberto Pagliarini

1 Equazioni omogenee di ordine maggiore di due

Esercizio 1

Risolvere la seguente equazione omogenea lineare di ordine 3

$$y''' + y'' - 8y' - 12y = 0 \tag{1}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$y = e^{\lambda t}$$

Calcoliamoci quindi le derivate prima, seconda e terza di y; quindi:

$$y' = \lambda e^{\lambda t} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda t}$$

Andiamo ora a inserire questi valori nell'equazione (1) ottenendo il seguente risultato

$$e^{\lambda t}(\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12) = 0$$

Ma siccome $e^{\lambda t}$ é sempre diverso da zero, non ci rimane altro che risolvere

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 = 0$$

che non é altro che il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale (1).

Utilizzando la regola di Ruffini troveremo che

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2 = 0$$

L'uguaglianza a 0 si avrà se e solo se:

$$\lambda_1 = 3 \qquad e \qquad \lambda_{2,3} = -2$$

da cui si deduce che la radice -2 ha molteplicitá 2.
$\lambda_1 = 3$ origina la soluzione

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{3t}$$

mentre per quanto riguarda $\lambda_{2,3}$ siamo nel caso di due soluzioni reali coincidenti, quindi le soluzioni sono

$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-2t} \qquad y_3(t) = te^{\lambda_3 t} = te^{-2t}$$

Quindi la soluzione sará data dalla combinazione lineare delle tre, ossia

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} + C_3 te^{-2t} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2

Vogliamo risolvere la seguente equazione omogenea lineare di ordine 3

$$y''' + y'' - 8y' - 12y = 0 \tag{2}$$

la quale ha il seguente polinomio caratteristico associato

$$(\lambda^3 - 1) = 0$$

Anche in questo caso dobbiamo trovare tre soluzioni linearmente indipendenti. Utilizzando la regola di Ruffini otteniamo il seguente risultato

$$(\lambda^3 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \tag{3}$$

L'uguaglianza (3) si ha se e solo se

$$(\lambda - 1) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

Risolvendo la prima equazione otteniamo che

$$\lambda_1 = 1$$

la quale ci da la soluzione

$$y_1(t) = e^t$$

mentre dalla seconda otteniamo che

$$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \qquad \text{con} \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui otteniamo le due seguenti soluzioni linearmente indipendenti

$$y_2(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$y_3(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

La soluzione generale sarà data dalla combinazione lineare delle tre:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3

Con questo esercizio vederemo come compartarci quando ci sono radici del polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale con molteplicitá maggiore di 2.

vogliamo risolvere la seguente equazione differenziale omogenea di ordine 3:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \tag{4}$$

la quale ha il seguente polinomio caratteristico associato

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$$

Abbiamo dunque una radice per il polinomio caratteristico di molteplicità 3

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$

In questo caso abbiamo le seguenti 3 soluzioni linearmente indipendenti per l'equazione differenziale (4)

$$y_1(t) = e^{-t} \qquad y_2(t) = te^{-t} \qquad y_3(t) = t^2 e^{-t}$$

e la soluzione generale sarà data da

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4

Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale omogenea di ordine 4

$$y'''' + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0 \tag{5}$$

la quale ha il seguente polinomio caratteristico associato

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)^4 = 0$$

Abbiamo un'unica radice del polinomio caratteristico di molteplicitá 4, ossia

$$\lambda_{1,2,3,4} = -1$$

ed operando nello spirito dell'esercizio 3 otteniamo le seguenti 4 soluzioni linearmente indipendenti per l'equazione (5)

$$y_1(t) = e^{-t} \quad y_2(t) = te^{-t} \quad y_3(t) = t^2e^{-t} \quad y_4(t) = t^3e^{-t}$$

La soluzione generale sarà data da

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3t^2e^{-t} + C_4t^3e^{-t} \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 5

Con questo esercizio vedremo come gestire radici multiple con molteplicitá maggiore di due complesse.
Abbiamo la seguente equazione lineare omogenea di ordine 4

$$y'''' + 2y'' + y = 0 \tag{6}$$

che ha il seguente polinomio caratteristico associato

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

che viene fattorizzato in

$$(\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$(\lambda^2 + 1)^2$ ha due radici complesse e coniugate di molteplicità due,

$$\lambda_{1,2} = i \qquad \lambda_{3,4} = -i$$

da cui possiamo ottenere le soluzioni

$$y_1(t) = \cos t$$

$$y_2(t) = \sin t$$

$$y_3(t) = t\cos t$$

$$y_4(t) = t\cos t$$

La soluzione generale sarà data dalla combinazione lineare delle quattro:

$$y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3t\cos t + C_4t\sin t \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

2 Equazioni non omogenee

Vedremo ora alcuni esercizi su equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee di ordine 2. Ossia, l'obiettivo é quello di risolvere equazioni del tipo

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}$$

In astratto, se y_1 e y_2 risolvono l'equazione lineare non omogenea allora $y_h = y_1 - y_2$ risolve l'equazione omogenea associata. Quindi se conosciamo una soluzione particolare y_2 dell'equazione lineare non omogenea, avremo che ogni altra soluzione y_1 dell'equazione non omogenea sará del tipo $y_1 = y_h + y_2$. Possiamo dunque usare la seguente procedura:

1. trovo y_h, soluzione dell'equazione omogenea associata
2. trovo y_2, soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea
3. soluzione generale: $y = y_h + y_2$

Vedremo due metodi per trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea; quello di variazione delle costanti, il quale é un metodo universalmente valido e quello degli annichilatori che é un metodo utilizzabile quando il termine non omogeneo ha la forma di somma e prodotti di polinomi, esponenziali e funzioni trigonometriche, ovvero il termine non omogeneo è esso stesso soluzione di un'equazione omogenea a coefficienti costanti.

Esercizio 6

Vogliamo risolvere l'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t} \tag{7}$$

utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti.
La prima cosa da fare é quella di trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata a (7), ossia

$$y''' + y = 0$$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea é

$$\lambda^2 + 1 = 0 \tag{8}$$

da cui otteniamo che

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

quindi siamo nel caso in cui $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, dove $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Allora le due soluzioni linearmente indipendenti saranno

$$y_1 = \cos t \qquad y_2 = \sin t$$

e la soluzione generale dell'omogenea associata sará data da

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Utilizziamo ora il metodo delle variazioi delle costanti per trovare una soluzione particolare dell'equazione (7).
Siano ora $C_1 = C_1(t)$ e $C_2 = C_2(t)$.
Cerchiamo soluzioni particolari della non omogenea del tipo

$$y_2(t) = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \tag{9}$$

Calcoliamo la derivata di (9):

$$y_2'(t) = C_1'(t) \cos t - C_1(t) \sin t + C_2'(t) \sin t + C_2(t) \cos t$$

In (9 abbiamo un grado di libertà in più, e quindi possiamo imporre una relazione tra C_1 e C_2. Imponiamo la seguente relazione

$$C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \tag{10}$$

in questo modo in $y_2'(t)$ non compaiono piú le derivate di C_1 e C_2; quindi si ha che

$$y_2'(t) = -C_1 \sin t + C_2(t) \cos t$$

Calcoliamo ora $y_2''(t)$

$$y_2''(t) = -C_1' \sin t - C_1 \cos t + C_2'(t) \cos t - C_2(t) \sin t$$

Andiamo ora a sostiuire $y_2''(t)$ e $y_2(t)$ in

$$y_2'' + y_2 = \frac{1}{\cos t}$$

ottenendo

$$(-C_1' \sin t - C_1 \cos t + C_2'(t) \cos t - C_2(t) \sin t) + (C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t) = -C_1' \sin t + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

In fine ci resta il seguente sistema.

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otterremo che

$$\begin{cases} C_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t} \\ C_2'(t) = 1 \end{cases}$$

Non ci rimane che integrare per trovare $C_1(t)$ e $C_2(t)$.
Avremo che:

$$C_1(t) = \int C_1'(t)dt = \int -\frac{\sin t}{\cos t}dt = \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log|\cos t|$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)dt = \int 1dt = t$$

Dunque la soluzione generale dell'equazione 7 sará

$$y(t) = \log|\cos t|\cos t + t\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t \tag{11}$$

NOTA BENE: Seguendo la procedura suesposta, si perviene in generale al seguente sistema, la cui matrice è detta Wronskiana:

$$\begin{cases} C_1'y_1(t) + C_2'y_2(t) = 0 \\ C_1'y_1'(t) + C_2'y_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

dove $g(t)$ è il termine non omogeneo (secondo membro) dell'equazione differenziale, e y_1, y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata.

Esercizio 7

Vogliamo trovare una soluzione della seguente equazione differenziale del secondo ordine con il metodo di variazione delle costanti

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{t^2} \tag{12}$$

Come primo passo troviamo y_h soluzione dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

la quale ha il seguente polinomio caratteristico associato:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

e quindi due soluzioni reali linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato sono:

$$y_1(t) = e^{-2t} \qquad y_2(t) = te^{-2t}$$

da cui otteniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Utilizziamo ora il metodo delle variazioni delle costanti per trovare una soluzione particolare y_2 dell'equazione 12.
Poniamo

$$C_1 = C_1(t) \qquad C_2 = C_2(t)$$

e cerchiamo soluzioni particolari del tipo

$$y_2(t) = C_1(t)e^{-2t} + C_2(t)te^{-2t}$$

Calcoliamo ora la derivata prima e seconda di $y_2(t)$

$$y_2'(t) = C_1' e^{-2t} - 2C_1 e^{-2t} + C_2' te^{-2t} + C_2(e^{-2t} - 2te^{-2t})$$

Poniamo ora:

$$C_1' e^{-2t} + C_2' te^{-2t} = 0$$

in modo da ottenere

$$y_2'(t) = -2C_1 e^{-2t} + C_2(e^{-2t} - 2te^{-2t})$$

Calcoliamo ora facilemnte $y_2''(t)$

$$y_2''(t) = 4C_1 e^{-2t} + C_2(-4e^{-2t} + 4te^{-2t}) - 2C_1' e^{-2t} + C_2'(1-2t)e^{-2t}$$

Sostituiamo i valori ottenuti nell'equazione (12) ottenendo, dopo opportune semplificazioni (se tutto é stato eseguito correttamente tutto ció che riguarda C_1 e C_2 deve annullarsi) , il sequente risultato

$$-2C_1' e^{-2t} + C_2'(1-2t)e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{t^2}$$

Ci rimane dunque da risovere il seguente sistema, cui si poteva giungere direttamente, in omaggio alla precedente Nota, previo calcolo dela matrice Wronskiana.

$$\begin{cases} C_1' e^{-2t} + C_2' te^{-2t} = 0 \\ -2C_1' e^{-2t} + C_2'(1-2t)e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{t^2} \end{cases}$$

Notiamo che e^{-2t} è sempre diverso da zero quindi possiamo toglierlo e il sistema diventa

$$\begin{cases} C_1' + C_2' t = 0 \\ -2C_1' + C_2'(1-2t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

dal quale

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{1}{t} \\ C_2' = \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Calcoliamo ora C_1 e C_2 integrando i rispettivi valori

$$C_1 = -\int \frac{1}{t} dt = -\log|t|$$

$$C_2 = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$$

La soluzione generale dell'equazione (12) sará data da:

$$y = y_2 + y_h = -log|t|e^{-2t} - \frac{1}{t} te^{-2t} + C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Esercizio 8

Vogliamo risolvere la seguente equazione differenziale non omogenea del secondo ordine utilizzando il metodo degli annichilatori

$$y'' - 5y' + 6y = e^t \tag{13}$$

Il termine non omogeneo è soluzione dell'equazione omogenea $z' - z = 0$, di polinomio caratteristico $(\lambda - 1)$, la cui radice è $\lambda = 1$ con molteplicità uno. L'idea è dunque quella di cercare una soluzione particolare del tipo

$$y_2(t) = ce^t$$

ovvero una generica soluzione di $z' - z = 0$, o, equivalentemente, una generica soluzione associata alle radici del polinomio caratteristico $(\lambda - 1)$, o in altre parole, alla radice $\lambda = 1$ con molteplicità uno.

Calcoliamo la derivata prima e seconda di $y_2(t)$, ossia

$$y_2'(t) = y_2''(t) = ce^t$$

e andiamo a sostituire questi valori nell'equazione (13) ottenendo

$$ce^t - 5ce^t + 6ce^t = e^t \Rightarrow ce^t - 5ce^t + 6ce^t - e^t = e^t(c - 5c + 6c - 1) = 0 \qquad \forall t$$

Si ha che $e^t \neq 0 \forall t$ quindi risolviamo l'equazione

$$c - 5c + 6c - 1 = 0$$

dalla quale ricaviamo che il valore di c é $\frac{1}{2}$ e quindi la soluzione particolare sará

$$y_2(t) = \frac{1}{2} e^t$$

Sappiamo che la soluzione generale deve essere data da

$$y = y_2 + y_h$$

con y_2 soluzione particolare dell'equazione e y_h soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale; si ha che

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

e quindi la soluzione generale sará

$$y = \frac{1}{2}e^t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Esercizio 9

Riprendiamo l'equazione differenziale vista per l'esercizio 8, cambiando solo il termine noto.
Vogliamo una soluzione per la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 5y' + 6y = te^t \tag{14}$$

Il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea associata al polinomio $(\lambda - 1)^2$ (te^t è un polinomio di primo grado a fattore di un esponenziale con coefficiente uno, pertanto il polinomio caratteristico dovrà avere una radice di molteplicità due...)

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$y_2(t) = (a + bt)e^t = ae^t + bte^t$$

ossia una generica soluzione dell'equazione differenziale associata al polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^2$. Calcoliamo la derivata prima e seconda di $y_2(t)$, ossia

$$y_2'(t) = ae^t + be^t + bte^t = (a + b(1 + t))e^t$$
$$y_2''(t) = ae^t + be^t + be^t + bte^t = (a + b(2 + t))e^t$$

e andiamo a sostituire questi valori nell'equazione (14) ottenendo

$$[(a + b(2 + t))e^t]e^t - 5[(a + b(1 + t))e^t]e^t + 6[a + bt]e^t = e^t \tag{15}$$

Sappiamo che e^t é sempre diverso da zero quindi se vogliamo l'uguagliaza a zero dell'equazione (15) possiamo toglierlo, ottenendo come risultato

$$a + 2b + bt - 5a + 5b + 5bt + 6a + 6bt = 0 = 2a - 3b + t[b - 5b + 6b - 1] = 0$$

Dobbiamo ora trovare i valori di a e b, quindi andiamo a risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 2b - 1 = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Abbiamo dunque la seguente soluzione particolare:

$$y_2(t) = (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t)e^t$$

Cerchiamo ora la soluzione generale y sapendo,come abbiamo giá visto, che

$$y = y_2 + y_h \qquad \text{e} \qquad y_h = C_1e^{2t} + C_2te^{3t} \qquad C_1,C_2 \in \mathbb{C}$$

Quindi la soluzione generale sarà:

$$y = (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t)e^t + C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} \qquad C_1,C_2 \in \mathbb{C}$$

Esercizio 10

Nel caso si ricercassero soluzioni particolari dell'equazione

$$y'' - 5y' + 6y = t^2e^t \tag{16}$$

in cui il termine non omogeneo è "generato da una radice $\lambda = 1$ di molteplicità tre, si può imporre

$$y_2(t) = (a + bt + ct^2)e^t$$

(generica soluzione associata a $\lambda = 1$ con molteplicità tre) e poi procedere come fatto per gli esercizi 8 e 9.

NOTA BENE: la procedura descritta negli esercizi 8, 9 e 10 si applica quando la radice associata al termine non omogeneo non coincide con nessuna delle radici del polinomio csratteristico dell'equazione omogenea associata (caso NON risonante).

Esercizio 11

Vogliamo ora trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-5t}\cos 17t \tag{17}$$

In questo caso la radice associata al termine non omogeneo è $\lambda = -5 + 17i$ con molteplicità uno, per cui cercheremo una soluzione particolare del tipo

$$y_2(t) = ae^{-5t}\cos 17t + be^{-5t}\sin 17t,$$

ovvero una generica soluzione associata alle radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} - 5 \pm 17i$ con molteplicità uno, e poi procederemo come fatto negli esercizi precedenti.

Esercizio 12

Vogliamo risolvere la seguente equazione differenziale non omogenea

$$y'' + y = \cos t \tag{18}$$

Troviamo la soluzione dell'omogenea associata, la quale ha il seguente polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

Da cui

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

e quindi otteniamo le due seguenti soluzioni reali linearmente indipendenti

$$z_1(t) = \cos t \qquad z_2(t) = \sin t$$

La soluzione generale dell'omogenea associata sará quindi

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare y_2 dell'equazione lineare non omogenea. Dobbiamo cercare una soluzione particolare generata dalla radice $\lambda = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

NOTA BENE: In questo caso si ha coincidenza con una delle radici del polinomio caratteristico dell'omogenea, (si dice che si ha risonanza), per cui si cercherà una soluzione associata alla radice comune avente per molteplicità la somma della molteplicità con cui compare nel polinomio caratteristico dell'omogenea e della molteplicità relativa al termine non omogeneo.

Nella fattispecie la somma delle molteplicità è uguale a 2; quindi dovrà essere generata da

$$\cos t \qquad \sin t \qquad t\cos t \qquad t\sin t$$

D'altra parte, poichè una combinazione lineare di $\cos t$ e $\sin t$ produce solamente soluzioni dell'omogenea associata, la soluzione particolare della non omogenea sarà combinazione lineare delle sole $t\cos t$ e $t\sin t$, ossia possiamo imporre

$$y_2 = ta\cos t + tb\sin t$$

Calcoliamo ora le derivate prime e seconde di y_2 ottenendo

$$y_2' = a\cos t + b\sin t + t(-a\sin t + b\cos t)$$

$$y_2'' = -2a\sin t + 2b\cos t + t(-a\cos t - b\sin t) \tag{19}$$

Sostituiamo ora i valori trovati nell'equazione (18) ottenendo

$$\cos t = -2a\sin t + 2b\cos t \tag{20}$$

Siccome dobbiamo trovare i valori di a e b risolviamo l'equazione ()

$$\cos t = -2a\sin t + 2b\cos t =$$

$$= -2a\sin t + 2b\cos t - \cos t = 0$$

$$\cos t(2b-1) - 2a\sin t = 0 \forall t$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 2b - 1 = 0 \end{cases}$$

ed infine i valori per a e b

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque

$$y_2(t) = \frac{1}{2}t\sin t$$

E quindi la soluzione generale sarà:

$$y = \frac{1}{2}t\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t \qquad C_1,C_2 \in \mathbb{C}$$

Esercizio 13

Risolvere la seguente equazione differenziale non omogenea del terzo ordine

$$y''' + y'' - 8y' - 12y = 2e^{-2t} \tag{21}$$

Come prima cosa troviamo y_h soluzione generale dell'omogenea associata, la quale ha il seguente polinomio caratteristico

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2$$

da cui ricaviamo le seguenti radici

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_{2,3} = -2$$

e quindi tre soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea sono

$$z_1(t) = e^{3t} \qquad z_2(t) = e^{-2t} \qquad z_3(t) = te^{-2t}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata a (21) è, come sappiamo, una combinazione lineare delle tre, ossia

$$y_h = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t} + C_3te^{-2t} \qquad C_1,C_2,C_3 \in \mathbb{C}$$

Dobbiamo ora trovare una soluzione particolare y_2 dell'equazione (21). Il termine non omogeneo è associato a $\lambda = -2$ con molteplicità uno, il polinomio caratteristico dell'omogenea ha una radice $\lambda = -2$ con molteplicità due, pertanto cercheremo una soluzione associata alla radice $\lambda = -2$ con molteplicità 2+1=3.

In particolare sarà generata da

$$e^{-2t} \qquad te^{-2t} \qquad t^2e^{-2t} \tag{22}$$

Ora, e^{-2t} e te^{-2t} sono soluzioni dall'omogenea, e quindi la soluzione particolare sarà data da

$$y_2 = at^2e^{-2t}$$

Per il calcolo di a si procede come negli esercizi precedenti.