Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Tiziano Villa

18 Settembre 2015

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	18	
problema 2	12	
totale	30	

1. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i, $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j.

   Per associare un linguaggio a una rete di Petri s'introduce un insieme di eventi E, una funzione che etichetta le transizioni con eventi $l : T \to E$, e un insieme di marcature che accettano $X_m \subseteq N^n$ (n e' il numero di posti).

   Si consideri la rete di Petri P_{25} definita da:

   - $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
   - $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (p_3, t_4), (t_1, p_1), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_3), (t_4, p_4)\}$
   - $\forall i, j \; w(p_i, t_j) = 1$
   - $\forall i, j \; w(t_i, p_j) = 1$,

   Sia $x_0 = [1, 0, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

   (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{25}.

(b) Si associ a P_{25} un linguaggio basato sul seguente alfabeto degli eventi $E = \{a, b\}$, con $l(t_1) = l(t_2) = a$ e $l(t_3) = l(t_4) = b$ (cioe', l'evento a e' associato alla transizione t_1 etc.).

L'insieme delle marcature accettanti sia $X_m = \{[0, 0, 0, 1]\}$.

Si descriva il linguaggio accettato (cioe' marcato) da P_{25}.

Traccia di soluzione.

Il linguaggio marcato e' $L_{25}^m = \{a^k b a^k b \mid 0 \leq k\}$, libero da contesto, ma non regolare.

(c) E’ possibile rappresentare il linguaggio L_{25} con un automa a stati infiniti (cioe’ un automa classico che puo’ avere un numero infinito di stati) ? Se si, lo si rappresenti con un automa a stati infiniti connesso.

Traccia di soluzione.

Con un automa a stati infiniti si puo accettare qualsiasi linguaggio, anche non ricorsivo (nel caso estremo si puo’ immaginare di avere catene di stati e transizioni disgiunti per ogni parola di un dato linguaggio).

Si veda l’allegato per il diagramma di un automa con stati infiniti che lo genera.

(d) E' possibile rappresentare il linguaggio L_{25} con un automa a stati finiti ? Se si, lo si rappresenti con un automa a stati finiti.

Traccia di soluzione.

Il linguaggio L_{25}^{m} non e' un linguaggio regolare e percio' non e' descrivibile con un automa a stati finiti.

(e) Si mostrino con un diagramma di Venn le inclusioni delle seguenti classi di linguaggi: linguaggi di reti di Petri, linguaggi regolari, linguaggi liberi da contesto, linguaggi sensibili al contesto, linguaggi di Turing (ricorsivamente enumerabili), discutendo brevemente il diagramma.

Traccia di soluzione.

Si veda l'allegato con il diagramma di Venn richiesto.

2. Si consideri l'automa ibrido che rappresenta un veicolo a guida automatica controllato da un supervisore.

   Il sistema ha tre variabili di stato: $(x(t), y(t)) \in R^2$ (posizione del baricentro sul piano di movimento) e $\phi(t) \in [-\pi, \pi]$ (angolo in radianti dell'asse principale sul piano di movimento), che sono anche disponibili come variabili d'uscita.

   C'e' una variabile d'ingresso discreta $U(t) = \{ferma, parti, assente\}$.

   Si definisce una funzione $e(t) = f(x(t), y(t))$ che rappresenta l'uscita di un sensore indicante la distanza del baricentro del veicolo da una traccia luminosa sul pavimento che definisce il percorso cui il veicolo controllato si deve attenere.

   Al tempo t il veicolo si puo' muovere lungo l'asse principale con velocita' $0 \leq u(t) \leq 10$ km/h. Inoltre puo' rotare rispetto al suo baricentro con velocita' angolare $-\pi \leq \omega(t) \leq \pi$ rad/sec. Il moto del veicolo e' determinato da un sistema di tre equazioni differenziali: $\dot{x}(t) = u(t)\ cos\ \phi(t), \dot{y}(t) = u(t)\ sen\ \phi(t)$, $\dot{\phi}(t) = \omega(t)$.

   La specifica dell'automa ibrido del sistema controllato e' come segue:

   - locazioni: $destra$,$diritto$,$sinistra$,$fermo$, dove supponiamo che $fermo$ sia la condizione iniziale con $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \phi(0) = \phi_0$;
   - dinamica della locazione $destra$: $\dot{x}(t) = 10\, cos\ \phi(t), \dot{y}(t) = 10\, sen\ \phi(t)$, $\dot{\phi}(t) = -\pi$,
     dinamica della locazione $diritto$: $\dot{x}(t) = 10\, cos\ \phi(t), \dot{y}(t) = 10\, sen\ \phi(t)$, $\dot{\phi}(t) = 0$,
     dinamica della locazione $sinistra$: $\dot{x}(t) = 10\, cos\ \phi(t), \dot{y}(t) = 10\, sen\ \phi(t)$, $\dot{\phi}(t) = \pi$,
     dinamica della locazione $fermo$: $\dot{x}(t) = 0, \dot{y}(t) = 0$, $\dot{\phi}(t) = 0$,
     si omettono gl'invarianti delle locazioni che in questo caso sono il complemento delle guardie delle transizioni uscenti;
   - (la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*) in questo caso le uscite coincidono con lo stato e le azioni sono le funzioni identita' e percio' si omettono,
     transizione da $destra$ a $diritto$: $vaDiritto/$,
     transizione da $diritto$ a $destra$: $vaAdestra/$,
     transizione da $diritto$ a $sinistra$: $vaAsinistra/$,

transizione da $diritto$ a $fermo$: $Fermati/$,
transizione da $sinistra$ a $diritto$: $vaDiritto/$,
transizione da $sinistra$ a $fermo$: $Fermati/$,
transizione da $sinistra$ a $destra$: $vaAdestra/$,
transizione da $destra$ a $sinistra$: $vaAsinistra/$,
transizione da $destra$ a $fermo$: $Fermati/$,
transizione da $fermo$ a $diritto$: $Parti/$,
dove $vaDiritto = \{(U(t), x(t), y(t), \phi(t)) \mid U(t) \neq ferma, |e(t)| < \epsilon_1\}$,
$vaAdestra = \{(U(t), x(t), y(t), \phi(t)) \mid U(t) \neq ferma, e(t) > \epsilon_2\}$,
$vaAsinistra = \{(U(t), x(t), y(t), \phi(t)) \mid U(t) \neq ferma, -\epsilon_2 > e(t)\}$,
$Fermati = \{(U(t), x(t), y(t), \phi(t)) \mid U(t) = ferma\}$,
$Parti = \{(U(t), x(t), y(t), \phi(t)) \mid U(t) = parti\}$.

(a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

Traccia di risposta.

Si veda l'automa e la discussione sull'esempio nei libri di testo di Lee-Varaiya e Lee-Seshia.

(b) Si spieghi qualitativamente il comportamento delle traiettorie del sistema descritto dall'automa ibrido.

    Traccia di risposta.

    Si veda la discussione sull'esempio nei libri di testo di Lee-Varaiya e Lee-Seshia.

(c) Si mostri che la traiettoria del veicolo quando si trova nelle locazioni $destra$ o $sinistra$ e' una circonferenza.

Qual e' il raggio di questa circonferenza e quanto tempo impiega il veicolo a completare una circonferenza ?

Traccia di soluzione.

S'integri il sistema di equazioni differenziali associate alla locazione $sinistra$: $\dot{x}(t) = 10\, cos\, \phi(t), \dot{y}(t) = 10\, sen\, \phi(t), \dot{\phi}(t) = \pi$, iniziando dall'equazione per $\phi(t)$ e sostituendone il risultato nelle due equazioni per $x(t)$ e $y(t)$. Una volta ottenuti $x(t)$ e $y(t)$ si determini il luogo dei punti da essi descritto. Calcolo simmetrico per la locazione $destra$.

Si consideri il caso in cui l'automa e' nella locazione $sinistra$ (il caso della locazione $destra$ e' perfettamente simmetrico).

$$x(t) - x(0) = 10 \int_0^t cos(\phi(0) + \pi t) dt = (10/\pi)[sen(\phi(0) + \pi t)]_0^t$$
$$= (10/\pi)[sen(\phi(0) + \pi t) - sen(\phi(0)],$$

$$y(t) - y(0) = 10 \int_0^t sen(\phi(0) + \pi t) dt = (-10/\pi)[cos(\phi(0) + \pi t)]_0^t,$$
$$= (-10/\pi)[cos(\phi(0) + \pi t) - cos(\phi(0)],$$

$$\phi(t) - \phi(0) = \pi t.$$

Percio'

$$(x(t) - x(0) + (10/\pi) sen(\phi(0))^2 + (y(t) - y(0) - (10/\pi) cos(\phi(0))^2 =$$
$$= (10/\pi)^2 (sen^2(\phi(0) + \pi t) + cos^2(\phi(0) + \pi t)) = (10/\pi)^2,$$

da cui il veicolo si muove lungo una circonferenza di raggio $(10/\pi)$ che richiede 2 secondi per essere completata (una circonferenza e' 2π radianti e la velocita' e' π radianti al secondo).