Sistemi, 21/02/2020
Tempo a disposizione: 2h

Esercizio 1 (12 pt)
Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t) \\ \dot{v}(t) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Calcolare le radici dell'equazione caratteristica e ricavare l'evoluzione libera $v_l(t)$ del sistema (2pt)
2. Discutere la stabilità del sistema (1pt)
3. Calcolare l'evoluzione forzata $v_f(t)$ (2pt)
4. Calcolare la risposta totale del sistema (1pt)
5. Ricavare la funzione di trasferimento del sistema $H(s)$ e disegnare il diagramma di Bode di $H(s)$ (6pt).

---

1. L'equazione caratteristica del sistema è:

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

le cui radici sono $s_1 = -1$ e $s_2 = -2$.
Quindi l'equazione dell'evoluzione libera sarà:

$$v_l(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$$

Dalle condizioni iniziali troviamo i valori dei coefficienti c_1 e c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera del sistema è:

$$v_l(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

2. Le radici caratteristiche del sistema sono $s_1 = -1$ e $s_2 = -2$, ricavate al punto precedente. Dato che $Re(s_1) < 0$ e $Re(s_2) < 0$, il sistema risulta **asintoticamente stabile** e di conseguenza anche **BIBO stabile**.

3. L'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si ottiene moltiplicando la funzione di trasferimento, $H(s)$, per la trasformata di Laplace dell'ingresso:

$$V_f(s) = H(s)U(s)$$

$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s+2}$, quindi:

$$V_f(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 3s + 2}U(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)\frac{1}{s+2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$V_f(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{C_{1,1}}{s+1} + \frac{C_{2,1}}{s+2} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2}\right)$$

$C_{1,1} = (s+1)\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}|_{s=-1} = 1$

$C_{2,1} = \frac{d}{ds}((s+2)^2\frac{1}{(s+1)(s+2)^2})|_{s=-2} = -1$

$C_{2,2} = (s+2)^2\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}|_{s=-2} = -1$

Quindi otteniamo l'espressione definitiva di V_f nel dominio delle frequenze:

$$V_f(s) = \frac{1}{3}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2})$$

Applico l'antitrasformata $\mathcal{L}^{-1}$ e ottengo :

$v_f(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})$

$v_f(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}(e^{t} - 1 - t)$

4. La risposta totale del sistema è $v_l(t) + v_f(t)$
5. La risposta impulsiva nel dominio delle frequenze si ottiene facendo la trasformata di Laplace del sistema con *condizioni iniziali nulle!*.
   Quindi:

$$\mathcal{L}[\ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t)] = \mathcal{L}[\frac{1}{3}u(t)]$$

$$(s^2 + 3s + 2)V(s) = \frac{1}{3}U(s)$$

$$H(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)(s+2)}$$

Scriviamo la risposta impulsiva in forma di Bode:

$$H(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{(1+s)(1+\frac{1}{2}s)}$$

Ricordiamo che nella formula di Bode $s = j\omega$

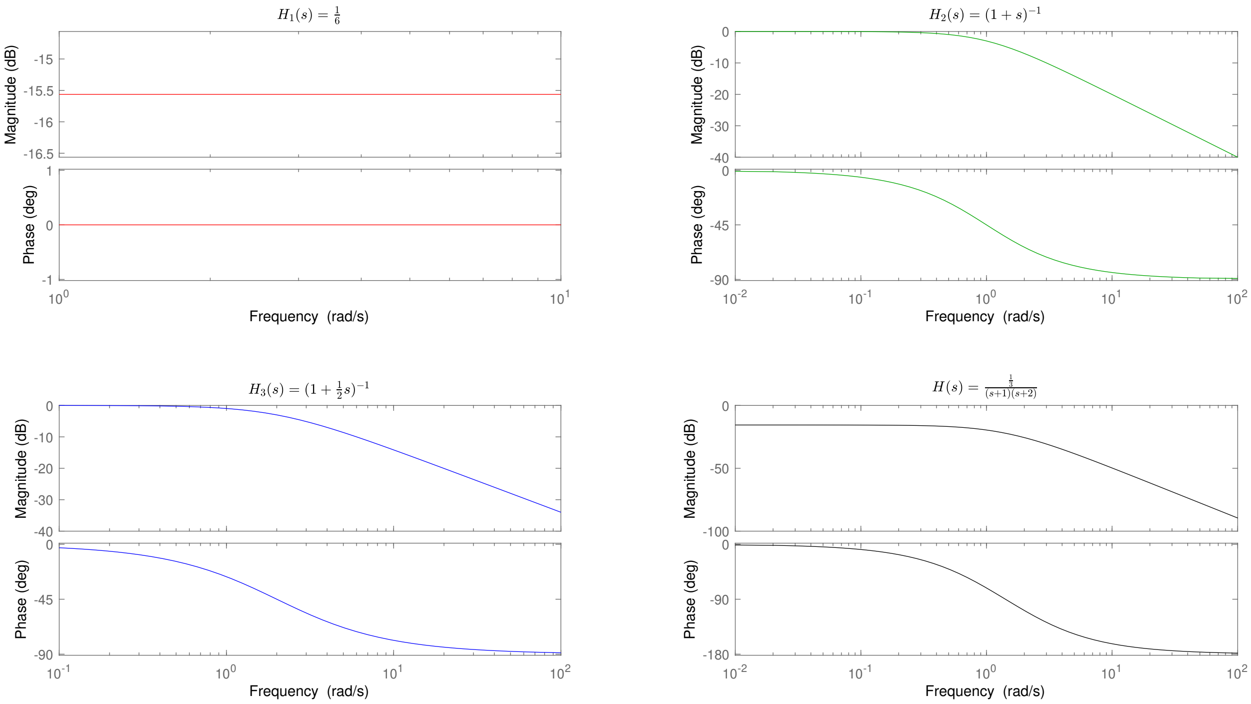
Abbiamo da rappresentare in modulo e ampiezza le seguenti funzioni:

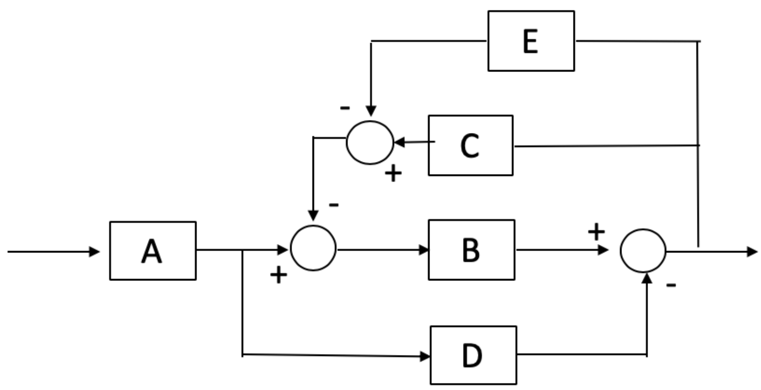
$$H_1(s) = \frac{1}{6}$$

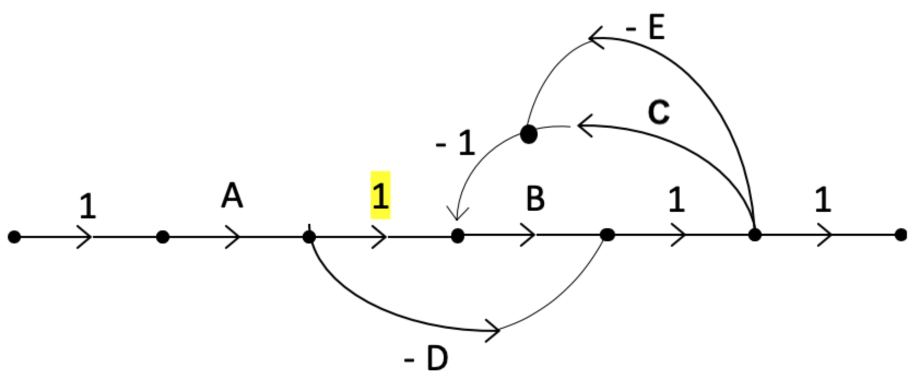
$$H_2(s) = (1+s)^{-1}$$

$$H_3(s) = (1+\frac{1}{2}s)^{-1}$$

NB: I grafici usano la convenzione Matlab per la fase. La soluzione va comunque bene almeno di una traslazione lungo l'asse verticale.







Esercizio 2 (4pt)

Semplificare lo schema seguente trovando la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita:

Utilizzando lo schema di flusso otteniamo:

Cammini aperti:

$P_1 = AB$
$P_2 = -AD$

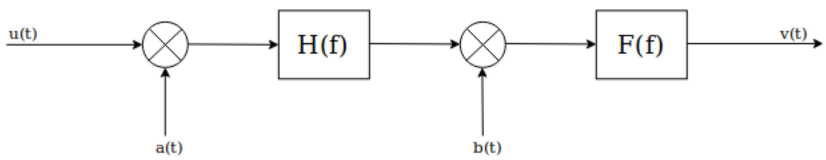
Anelli singoli:
$P_{11} = -BC$
$P_{21} = BE$

Coppie di anelli che non si toccano: nessuna

Delta:
$\Delta = 1 - (BE - BC) = 1 - BE + BC$
$\Delta_1 = 1$
$\Delta_2 = 1$

Trasmittanza totale:
$T = \frac{AB-AD}{1-BE+BC}$

Esercizio 3 (10pt)
Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $v(t)$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze:



Dove i segnali in ingresso sono: $u(t) = 4sinc^2(2t)$, $a(t) = cos(10\pi t)$, $b(t) = cos(6\pi t)$.
I filtri invece sono definiti nel modo seguente

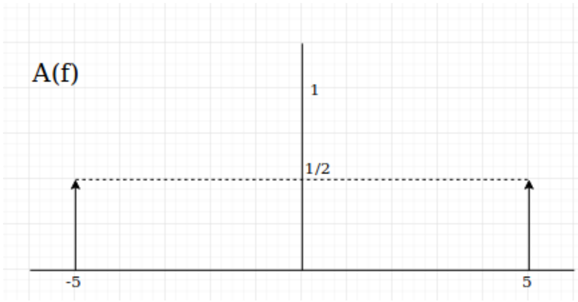
$$H(f) = \begin{cases} 2 & se \ 3 \leq |f| \leq 5 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F(f) = \begin{cases} 2 & se \ |f| \leq 3 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

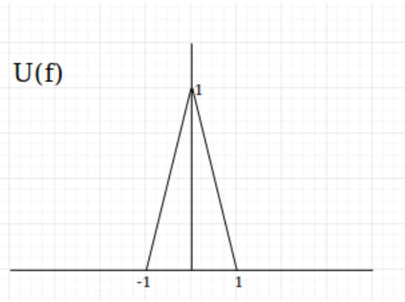
Possiamo parlare di aliasing?.

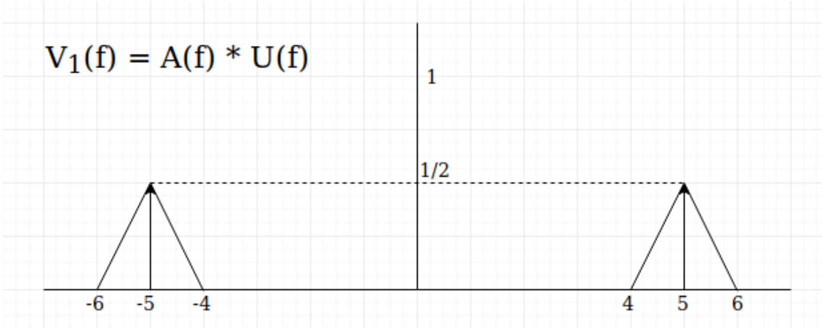
Notiamo che $H(f)$ è un filtro **passabanda** (ovvero un filtro a supporto limitato attorno a un punto che NON contiene l'origine), mentre $F(f)$ è un filtro **passabasso** (ovvero a supporto limitato attorno all'origine).

Convertiamo i segnali temporali in segnali frequenziali usando la trasformata di Fourier:
$u(t) = 4sinc^2(2t) \quad \stackrel{TdF}{\Longrightarrow} \quad U(f) = 4\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)$ (convoluzione di due box centrate in origine)
$a(t) = cos(10\pi t) \quad \stackrel{TdF}{\Longrightarrow} \quad A(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f+5) + \delta(f-5)\right]$
$b(t) = cos(6\pi t) \quad \stackrel{TdF}{\Longrightarrow} \quad B(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f+3) + \delta(f-3)\right]$
Cominciamo quindi l'esercizio rappresentando graficamente i due segnali in input, $u(t)$ e $a(t)$:
Effettuiamo la convoluzione tra i due segnali andando a centrare $U(f)$ in $A(f)$, e moltiplichiamo le rispettive ampiezze, ottenendo un segnale $V_1(f)$ di ampiezza $A = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

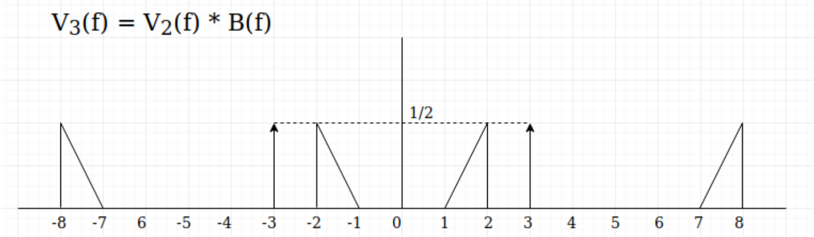
Ora adoperiamo il filtro $H(f)$ sul segnale $V_1(f)$, ottenendo in uscita il segnale $V_2(f)$, che avrà ampiezza $A = 1$.



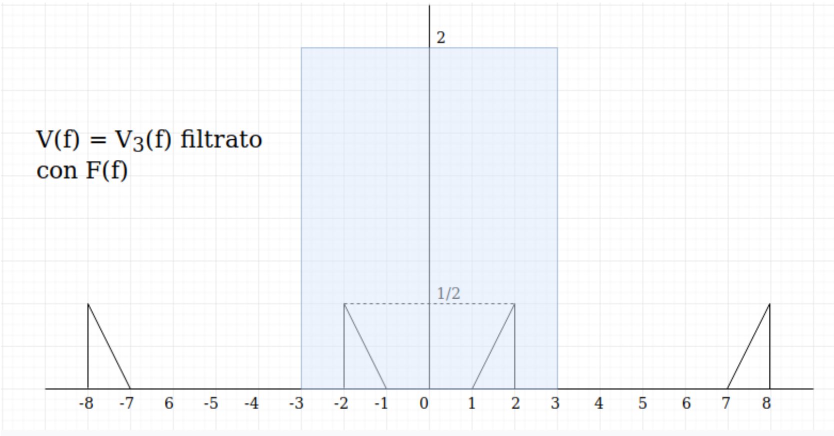


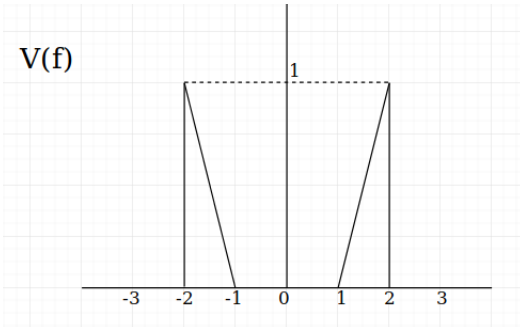


Ora dobbiamo effettuare la convoluzione tra $V_2(f)$ e $B(f)$: centriamo il primo nel secondo e moltiplichiamo le rispettive ampiezze, ottenendo il seguente segnale $V_3(f)$:



L'ultimo passaggio da effettuare è quello di filtrare il segnale così ottenuto con $F(f)$, che è una box di banda $B_F = 3$ e ampiezza $A_F = 2$:





Esercizio 4 (4pt)
Calcolare la trasformata zeta della successione esponenziale (causale): $\lambda^k \delta_{-1}(k)$

Ricordando che la trasformata zeta del gradino è $\frac{z}{z-1}$, sfruttiamo la proprietà di moltiplicazione per λ^k con $v(k) = \delta_{-1}(k)$

$$\mathcal{Z}[\lambda^k \delta_{-1}(k)] = \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)]\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{\frac{z}{\lambda}}{\frac{z}{\lambda} - 1} = \frac{z}{z - \lambda}$$
