Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 6
11 novembre 2014

Nello svolgimento dei seguenti problemi si ricordi che dall'Osservazione iniziale della sezione 10.1 del Filo Rosso segue che un polinomio monico in $\mathbb{Z}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ se e solo se è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

1. Si decida se i seguenti polinomi sono irriducibili:

   (a) $16\,x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (b) $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (c) $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.
   (d) $15x^2 + 11x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (e) $x^8 + 3x^4 + 15x^3 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (f) $x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 21 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (*8 punti*)

2. Vero o falso?

   (a) (X) è un ideale massimale di $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$.
   (b) (X) è un ideale massimale di $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$.
   (c) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]\,/(x^3 + 2x + 1)$ è un campo di 27 elementi.
   (d) Esiste un campo F tale che $x^4 + x^3 + x + 1$ è un polinomio irriducibile in $F[x]$.
   (e) Dati $n \geq 2$ numeri primi distinti $p_1, \dots, p_n$, la radice n-sima del prodotto $\sqrt[n]{p_1 \dots p_n}$ è sempre irrazionale.

   (8 punti)

3. Sia $F = \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{I}$, dove $I = (x^2 + 2x + 2)$.

   (a) Si verifichi che F è un campo
   (b) Quanti elementi ha F?
   (c) l'elemento $x + I$ è un quadrato in F?

   (6 punti)

4. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo tale che -1 è un quadrato in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si dimostri che

   (a) l'anello $\frac{\mathbb{Z}[i]}{p\mathbb{Z}[i]}$ non è un dominio
   (b) p non è un elemento irriducibile di $\mathbb{Z}[i]$
   (c) $p = a^2 + b^2$ dove $a, b \in \mathbb{Z}$

   (Sugg: si applichi il Teorema di Ruffini al polinomio $x^2 + 1$ in $\frac{\mathbb{Z}[i]}{p\mathbb{Z}[i]}[x]$.)

   (8 punti)

5. (a) Sia F un campo e f, g due polinomi irriducibili in $F[x]$. Sia $I = (f)$, $J = (g)$, $T = (fg)$. Si dimostri che $F[x]/T \cong F[x]/I \times F[x]/J$. (Sugg: per tali f e g esistono r e s in $F[x]$ tali che $1 = rf + sg$)

   (b) Sia $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e sia $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$. Si dimostri che $F[x]/(f)$ è prodotto di due campi. Quanti elementi ha $F[x]/(f)$?

   (c) Quanti sono gli elementi invertibili in $F[x]/(f)$? E i loro ordini?

(**)

Consegna: mercoledì 19 novembre durante la lezione.