# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

28 Febbraio 2019

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

| problema | punti massimi | i tuoi punti |
|---|---|---|
| problema 1 | 18 | |
| problema 2 | 12 | |
| totale | 30 | |

1. Si considerino i due seguenti automi definiti sull'alfabeto $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

   Automa $G$ (impianto):

   - stati: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ con $0$ stato iniziale e $8$ unico stato accettante;
   - transizione da 0 a 1: $a_1$,
     transizione da 0 a 3: $a_2$,
     transizione da 1 a 2: $b_1$,
     transizione da 1 a 4: $a_2$,
     transizione da 2 a 5: $a_2$,
     transizione da 3 a 4: $a_1$,
     transizione da 3 a 6: $b_2$,
     transizione da 4 a 5: $b_1$,
     transizione da 4 a 7: $b_2$,
     transizione da 5 a 8: $b_2$,
     transizione da 6 a 7: $a_1$,
     transizione da 7 a 8: $b_1$.

   Automa $H_a$ (specifica):

   - stati: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ con $0$ stato iniziale e $8$ unico stato accettante;
   - transizione da 0 a 1: $a_1$,
     transizione da 0 a 3: $a_2$,
     transizione da 1 a 2: $b_1$,
     transizione da 1 a 9: $a_2$,
     transizione da 2 a 5: $a_2$,
     transizione da 3 a 4: $a_1$,
     transizione da 3 a 6: $b_2$,
     transizione da 4 a 7: $b_2$,
     transizione da 5 a 8: $b_2$,
     transizione da 6 a 7: $a_1$,
     transizione da 7 a 8: $b_1$,
     transizione da 9 a 5: $b_1$.

(a) Si disegnino i grafi dei due automi.

(b) Si consideri la definizione del problema BSCP-NB (problema del controllo supervisore di base nonbloccante).

**Definizione - BSCP-NB**

*Siano dati un sistema a eventi discreti $G$ con alfabeto $E$ e $E_{uc} \subseteq E$, un linguaggio marcato ammissibile $L_{am} \subseteq \mathcal{L}_m(G)$, con l'ipotesi che $L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso.*

*Si trovi un supervisore nonbloccante $S$ tale che:*

*i.* $\mathcal{L}_m(S/G) \subseteq L_{am}$,

*ii.* $\mathcal{L}_m(S/G)$ *e' il "massimo" possibile, cioe' per ogni altro supervisore nonbloccante* $S_{altro}$ *tale* $\mathcal{L}_m(S_{altro}/G) \subseteq L_{am}$, *si ha*

$$\mathcal{L}_m(S_{altro}/G) \subseteq \mathcal{L}_m(S/G).$$

*Si dice che $S$ e' la soluzione nonbloccante minimamente restrittiva.*

i. Come si ottiene il supervisore $S$ ?
Traccia di soluzione.
Si sceglie $S$ tale che $\mathcal{L}(S/G) = \overline{L_{am}^{\uparrow C}}$ e $\mathcal{L}_m(S/G) = L_{am}^{\uparrow C}$, se $L_{am}^{\uparrow C} \neq \emptyset$.
Si puo' costruire $S$ costruendo un automa che generi e marchi $\overline{L_{am}^{\uparrow C}}$.

ii. Si dimostri che, nelle ipotesi date ($L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso), se $\mathcal{L}(S/G) = \overline{L_{am}^{\uparrow C}}$ allora $\mathcal{L}_m(S/G) = L_{am}^{\uparrow C}$.
Prima si scriva formalmente la definizione che $L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso.
Traccia di soluzione.
$L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso equivale a $L_{am} = \overline{L_{am}} \cap \mathcal{L}_m(G)$.
Se $L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso, anche $L_{am}^{\uparrow C}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso (si vedano le dispense), cioe' $L_{am}^{\uparrow C} = \overline{L_{am}^{\uparrow C}} \cap \mathcal{L}_m(G)$.
Da cui, per definizione,

$$\mathcal{L}_m(S/G) = \mathcal{L}(S/G) \cap \mathcal{L}_m(G)$$

e quindi per l'ipotesi $\mathcal{L}(S/G) = \overline{L_{am}^{\uparrow C}}$ e poiche' $L_{am}^{\uparrow C}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso

$$\mathcal{L}_m(S/G) = \mathcal{L}(S/G) \cap \mathcal{L}_m(G) = \overline{L_{am}^{\uparrow C}} \cap \mathcal{L}_m(G) = L_{am}^{\uparrow C}.$$

(c) Si risolva il problema BSCP-NB per trovare un supervisore nonbloccante nell'esempio iniziale, dove sono dati gli automi $G$ e $H_a$. Si supponga che $L_{am} = \mathcal{L}_m(H_a)$, cioe che $L_{am}$ sia il linguaggio marcato dall'automa $H_a$ e che $E_{uc} = \{a_2, b_2\}$.

Traccia di soluzione.

Prima si deve verificare che $L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso, cioe $L_{am} = \overline{L_{am}} \cap \mathcal{L}_m(G)$, il che e' vero per costruzione dei due automi $G$ e $H_a$,

Poi si costruisce $L_{am}^{\uparrow C}$, cioe' il sottolinguaggio massimalmente controllabitl di $L_{am}$.

Si ottiene $L_{am}^{\uparrow C} = \{a_2b_2a_1b_1, a_2a_1b_2b_1\}$ e $\overline{L_{am}^{\uparrow C}} = \overline{\{a_2b_2a_1b_1, a_2a_1b_2b_1\}}$.

Un automa che generi e marchi il linguaggio $\overline{L_{am}^{\uparrow C}}$ realizza il supervisore nonbloccante cercato.

Per il calcolo di $L_{am}^{\uparrow C}$ si rinvia alla soluzione del tema d'esame del 28/2/2018 (dove si e' calcolato per il medesimo esempio $K^{\uparrow C}$ e si noti che $L_{am}$ svolge il ruolo di $K$).

2. Si consideri il sistema a eventi discreti $G$ dove $\mathcal{L}(G) = \overline{a^\star b a^\star}$, $\mathcal{L}_m(G) = a^\star b a^\star$, Sia $E_{uc} = \{b\}$.

   Sia dato il linguaggio ammissibile $L_{am} = \{a^m b a^n : m \geq n \geq 0\}$.

   (a) Il linguaggio $\overline{L_{am}}$ e' regolare ?

   Traccia di soluzione.

   No. Bisogna contare le “a”.

   (b) Si enunci il teorema di esistenza di un supervisore nonbloccante $S$ tale che $\mathcal{L}_m(S/G) = L_{am}$.

   Traccia di soluzione.

   Sia dato il sistema a eventi discreti $G = (X, E, f, \Gamma, x_o, X_m)$, dove $E_{uc} \subseteq E$ sono gli eventi incontrollabili (per cui $E_c = E \setminus E_{uc}$). Si consideri il linguaggio $L_{am} \subseteq \mathcal{L}_m(G)$, dove $L_{am} \neq \emptyset$. Esiste un supervisore nonbloccante $S$ per $G$ tale che

$$\mathcal{L}_m(S/G) = L_{am}, \quad \mathcal{L}(S/G) = \overline{L_{am}}$$

   se e solo se le due condizioni seguenti valgono:

   i. $L_{am}$ e' controllabile rispetto a $\mathcal{L}(G)$ e $E_{uc}$.

   ii. $L_{am}$ e' $\mathcal{L}_m(G)$-chiuso.

(c) Applicando la definizione, si verifichi se esiste tale supervisore nonbloccante.

Traccia di soluzione.

La controllabilita' di $L_{am}$ e' verificata: si disabilita "a" (evento controllabile) dopo che il numero di "a" che seguono "b" e' pari a quello di "a" che precedono "b".

Inoltre $L_{am}$ soddisfa la $\mathcal{L}_m(G)$-chiusura: $L_{am} = \overline{L_{am}} \cap \mathcal{L}_m(G)$, che e' vera per costruzione poiche'

$\{a^m ba^n : m \geq n \geq 0\} = \overline{\{a^m ba^n : m \geq n \geq 0\}} \cap a^\star ba^\star$.

Quindi esiste un supervisore $S$ nonbloccante tale che $\mathcal{L}(S/G) = \overline{L_{am}}$.

Da cui si ottiene: $\mathcal{L}_m(S/G) = \mathcal{L}(S/G) \cap \mathcal{L}_m(G) = \overline{L_{am}} \cap \mathcal{L}_m(G) = L_{am}$.

(d) Esiste una realizzazione a stati finiti del supervisore $S$, cioe' un automa a stati finiti $R$ che marca $\overline{L_{am}}$ e quindi tale che $\mathcal{L}_m(R) = \mathcal{L}(R) = \overline{L_{am}}$ ?

Se no, si motivi la risposta. Se si, si mostri tale realizzazione.

Traccia di soluzione.

No. Il supervisore deve generare e marcare il linguaggio $\overline{L_{am}}$, per cui deve avere un numero infinito di stati.

(e) Esiste una realizzazione con una rete di Petri del supervisore $S$ ?

Se no, si motivi la risposta. Se si, si mostri tale realizzazione.

Traccia di soluzione.

Si.

La seguente rete di Petri $P_{sup}$ realizza il supervisore $S$.

Si consideri la rete di Petri $P_{sup}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_3), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (t_1, p_1), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_3, p_2)\}$
- $\forall i, j \; w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \; w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [1, 0, 1]$ la marcatura iniziale.

Per associare un linguaggio a una rete di Petri s'introduce un insieme di eventi $E$, una funzione che etichetta le transizioni con eventi $l : T \to E$, e un insieme di stati che accettano $X_m \subseteq N^n$ ($n$ e' il numero di posti) per il linguaggio marcato.

Si assuma che alle transizioni $t_1$ e $t_3$ sia associato l'evento $a$, e che a $t_2$ sia associato l'evento $b$.

Una variante piu' semplice e' la seguente:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_3), (p_3, t_3), (t_1, p_1), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_3, p_2)\}$
- $\forall i, j \; w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \; w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [1, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

Ed altre varianti ancora ...