

Laboratorio Fisica 1

Prof. Nicola Daldosso

Il corso (sommario e modalità)

Scopo del corso di **LABORATORIO DI FISICA**

Il corso ha lo scopo di avviare lo studente alla conoscenza e all'utilizzo della strumentazione di laboratorio tramite l'esecuzione di alcuni esperimenti, che prevedono la misura di varie grandezze fisiche e la successiva elaborazione dei dati raccolti.

In particolare, si vuole dimostrare la validità di semplici leggi fisiche, avvalendosi della corretta procedura sperimentale.

Il corso è diviso in una parte di **lezioni in aula** sulla teoria degli errori di misura ed una seconda parte di esperienze svolte in **laboratorio** dagli studenti.

Programma del corso di “LABORATORIO DI FISICA

- 1) Misurazione di una grandezza fisica. Le unità di misura. Gli strumenti di misura.
- 2) Errori di misura. Errori sistematici e casuali. Errori assoluti e relativi. Propagazione degli errori. Cifre significative ed arrotondamenti.
- 3) Analisi statistica degli errori casuali. La media e la deviazione standard. La deviazione standard della media.
- 4) Istogrammi e distribuzioni. La distribuzione normale e le sue proprietà.
- 5) Interpolazione dei dati con una curva. Il metodo dei minimi quadrati. Interpolazione lineare e polinomia.
- 6) Lezioni introduttive sugli esperimenti da eseguire.

Esperienze di laboratorio

1) MISURA DI LUNGHEZZE (4 ore)

- Uso di diversi strumenti di misura (metro, micrometro, calibro)

2) ANALISI STATISTICA DEI DATI (4 ore)

3) ALLUNGAMENTO ELASTICO (4 ore)

- Verifica della legge di Hooke
- Misura della costante elastica di diverse molle

4) IL PENDOLO SEMPLICE (due blocchi da 4 ore)

- Misura del periodo di oscillazione e dipendenza dalla massa e dall'ampiezza
- Smorzamento delle oscillazioni
- Misura dell'accelerazione di gravità

5) ANALISI DATI SPERIMENTALI (4 ore)

6) DISCUSSIONE RISULTATI (4 ore)

7) RELAZIONI di LABORATORIO (4 ore)

La **Fisica** non si limita a studiare i fenomeni
solo qualitativamente

... ma studia i fenomeni soprattutto
quantitativamente.

Possiamo dire di conoscere un fenomeno
solo quando conosciamo delle formule
matematiche capaci di descriverlo...

Esempi: $v = s/t$ $F = m a$ $s = s_0 + v t$

Misura

Perché misurare?

“Misurare” permette di conoscere, descrivere, controllare qualsiasi sistema fisico nel miglior modo possibile.

“Misurazione” è il processo che porta alla quantificazione di una grandezza fisica, attraverso un numero, un insieme di numeri, cioè una tabella, o un grafico, esprimendo la “**misura**”, che è il risultato della misurazione.

Grandezze fisiche e loro misura (introduzione)

Grandezze fisiche e loro misura

Essendo la Fisica basata sul metodo scientifico-sperimentale, c'è la necessità di effettuare delle misure.

Le caratteristiche misurabili di un corpo prendono il nome di **grandezze fisiche**.

Il risultato di una misura viene sempre espresso mediante un numero ed una unità di misura.

Esempi

2 m

37 g

4,3 dl

43 km

Grandezze fisiche e loro misura

Misurare una grandezza fisica significa **confrontarla** con un'altra, a essa **omogenea**, scelta come **campione**.

Esempio

Supponiamo di voler misurare la lunghezza del banco.

Per prima cosa dobbiamo stabilire l'**unità di misura** per le lunghezze.

Una volta scelta l'unità di misura, cioè il **campione** andiamo ad effettuare il **confronto**.

Grandezze fisiche

Il valore non è altro che il rapporto tra la grandezza misurata e l'unità di misura.

Una grandezza si dice fisica se è misurabile.

Esempi

L'altezza di una persona, il suo peso, la sua temperatura corporea sono grandezze fisiche perché sono misurabili.

Il coraggio, la simpatia, la sincerità della stessa persona non sono grandezze fisiche perché non sono misurabili.

La definizione stessa delle grandezze fisiche, nonché il loro
impiego pratico, sono indissolubilmente
legati alla individuazione di **procedure di misurazione**.

La misurazione consente di stabilire
una corrispondenza tra grandezze fisiche e numeri e di applicare
quindi il linguaggio ed i formalismi della
matematica alla descrizione dei fenomeni naturali

Metodi di osservazione e misurazione

- A) Metodo morfologico
- B) Metodo classificatorio
- C) Metodo comparativo
- D) Metodo quantitativo o metrico
- E) Metodi statistici

Grandezze fisiche

a) Grandezze quantitative (o metrizzabili)

Sono le grandezze per le quali è possibile definire sia una relazione d'ordine transitiva sia una legge di composizione additiva (metodo quantitativo o metrico).

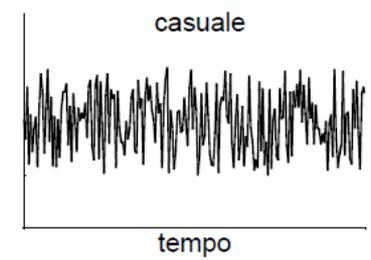
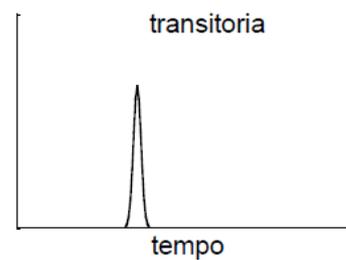
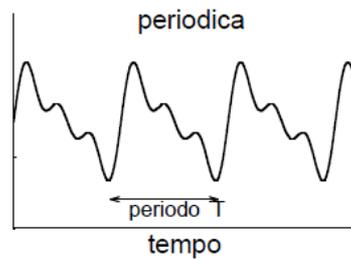
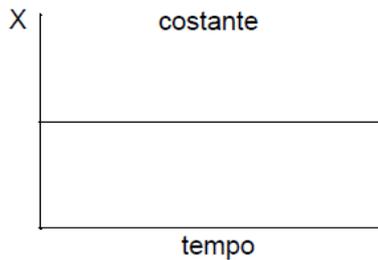
Esempi: La lunghezza, l'intervallo di tempo, la massa, la velocità, la forza sono esempi di grandezze quantitative.

b) Grandezze di stato (o non metrizzabili)

Sono grandezze per le quali è possibile definire una relazione d'ordine transitiva ma non una legge di composizione additiva (metodo comparativo).

Esempi: La temperatura e la durezza sono tipici esempi di grandezze di stato.

Dipendenza dal tempo delle grandezze fisiche



- Grandezze costanti
- Grandezze periodiche
- Grandezze impulsive
- Grandezze casuali

Unità di misura nell'antichità

La necessità di misurare è antica quanto l'uomo.

Per misurare le lunghezze (distanze), l'uomo ha utilizzato per molti millenni le parti del proprio corpo: il piede, il braccio, il pollice, il palmo, il passo

Il motivo è semplice. Sono unità di misura che ognuno di noi si porta sempre con sé

Sistema Internazionale

Per ovviare a questi inconvenienti si cercò di **standardizzare** (= rendere valide per tutti) le unità di misura.

Nel 1960, la comunità scientifica decide di definire un Sistema Internazionale (sigla **SI**) che gli scienziati di tutto il mondo sono tenuti ad usare.

Grandezze fondamentali e derivate

La scelta delle grandezze fisiche fondamentali ha seguito lo sviluppo stesso della scienza. Dalla geometria, la scienza più antica, emerse il concetto di **lunghezza**, al quale l'astronomia associò quello di **tempo** (più esattamente "intervallo di tempo" o "durata"). Con la definizione di lunghezza e di tempo è stato possibile costruire quella branca della fisica che si chiama cinematica (dal greco *kínema* = movimento). Quando in seguito si decise di indagare sulle cause legate al movimento dei corpi si presentò l'esigenza dell'impiego di una terza grandezza fisica, la **massa**.

All'inizio del 1800, lo studio dei fenomeni termodinamici impose l'introduzione di una quarta grandezza fondamentale, la **temperatura**. Successivamente lo studio dei fenomeni elettrici rese necessaria l'adozione di una quinta grandezza fondamentale, che venne individuata nella **intensità di corrente elettrica**, alla quale si aggiunse **l'intensità luminosa**, quando prese avvio lo studio dei fenomeni di ottica. Il quadro si andò infine completando nel 1971 con l'adozione di una settima grandezza fondamentale che fu riconosciuta nella **quantità di materia**.

Da queste sette grandezze fondamentali è possibile ricavare tutte le altre, necessarie per la descrizione dei diversi fenomeni naturali.

Sistema Internazionale

In Italia il SI viene introdotto ufficialmente nel 1982

Il SI è basato su sette grandezze fondamentali

Nome della grandezza	Unità di misura	simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Tempo (durata)	secondo	s
Temperatura	grado Kelvin	K
Intensità di corrente	Ampere	A
Quantità di sostanza	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

Grandezze fisiche derivate

Le sette grandezze fondamentali sono tra loro **indipendenti**, cioè nessuna di loro dipende dalle altre.

Esse sono anche **complete**, nel senso che mediante queste sette si possono esprimere tutte le altre grandezze.

Tutte le altre grandezze fisiche che non fanno parte delle sette prendono il nome di **grandezze fisiche derivate**.



Adobe Acrobat
Document

Giovanni Giorgi

Giovanni Giorgi (fisico)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Giovanni Giorgi (Lucca, 27 novembre 1871 – Castiglioncello, 19 agosto 1950) è stato un **ingegnere elettrotecnico** e **fisico italiano**.

Fu l'ideatore del sistema di unità di misura che porta il suo nome.

Verso la fine del **XIX secolo** si fece strada nel mondo scientifico la necessità, secondo un accenno già fatto da **Maxwell**, di introdurre una quarta dimensione fondamentale oltre alle tre grandezze fisiche meccaniche (**lunghezza**, **massa** e **tempo**).

Nel **1901** Giorgi propose alla Associazione Elettrotecnica Italiana (o AEI), un nuovo sistema che aveva come unità fondamentali il **metro**, il **chilogrammo**, il **secondo** ed una quarta grandezza da scegliere tra le unità di misura dell'elettrotecnica.

Nel **1935** fu adottato il *sistema Giorgi*, detto anche **MKSQ** perché la quarta unità fondamentale fu di fatto l'unità di misura della **resistenza elettrica** (**ohm**).

Nel **1960** la **XI conferenza generale di pesi e misure**, adottò il **Sistema internazionale di unità di misura** (SI), basato su sette grandezze fondamentali (il **metro** per la lunghezza, il **chilogrammo** per la massa, il **secondo** per il tempo, l'**ampere** per l'intensità di **corrente**, il **kelvin** per la **temperatura** termodinamica, la **mole** per la quantità di sostanza, la **candela** per l'**intensità luminosa**).

A **Milano**, **Genova** e **Roma** tre istituti tecnici industriali portano il suo nome.



Scommessa

C'è qualcuno di voi disposto a contare da 1 fino a un miliardo in cambio di altrettanti euro?

Dovrà scandire bene i numeri e riceverà il miliardo di euro solo quando arriverà ad un miliardo

Facciamo un po' di conti:

- supponiamo che per ogni numero da pronunciare ci voglia 1 secondo → ci vogliono un miliardo di secondi

- vediamo a quante ore corrispondono:

In 1 h ci sono $60 \times 60 = 3600$ s

$1.000.000.000 : 3600 = 277778$ h

Vediamo a quanti giorni corrispondono: $277778 : 24 = 11.574$ g

Vediamo a quanti anni corrispondono: $11.574 : 365 = 31,7$ anni

Ventiquattro ore su ventiquattro senza mangiare e senza dormire!!! Volete ancora scommettere?

METODI e STRUMENTI di MISURA

Metodi di misura ed errori di misura

L'operazione di misura consiste nel confrontare la grandezza fisica da misurare con un'unità di misura della stessa tramite uno strumento di misura.

Es. La lunghezza di una corda (grandezza fisica) si può misurare in metri (unità di misura) utilizzando un nastro graduato (strumento di misura).

Ogni misura quindi è data da un numero accompagnato dall'unità di misura adeguata: esso esprime il rapporto fra il valore della grandezza in esame e quello di una grandezza ad essa omogenea scelta come unità di misura. In generale si assume come misura m della grandezza M , espressa in unità U , il numero:

$$m = M/U$$

Misure dirette ed indirette

In una misura diretta si ottiene il valore numerico della grandezza fisica tramite il confronto con l'unità di misura o tramite l'uso di sistemi tarati.

In una misura indiretta si ottiene il valore numerico della grandezza fisica utilizzando relazioni analitiche note che legano la grandezza fisica che si vuole determinare ad altre grandezze fisiche. La misura diretta sarà allora fatta su queste grandezze.

Misura di una grandezza fisica

Il risultato di una singola misura deve fornire:

- i) il valore numerico x della grandezza fisica misurata;
- ii) l'errore Δx di sensibilità dello strumento sul numero x ;
- iii) l'unità di misura.

Es. La corda ha una lunghezza di 2.33 ± 0.01 m.

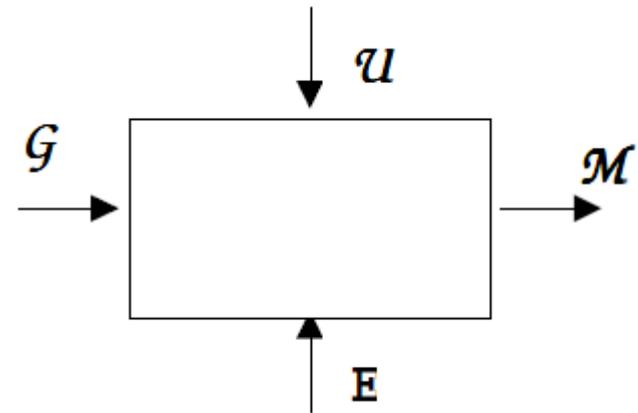
La frase indica che il valore numerico $x = 2.33$,
l'errore di sensibilità dello strumento è $\Delta x = 0.01$,
l'unità di misura è il metro.

Lo strumento di misura

Lo **strumento** di misura è un apparato che mette a confronto la grandezza da misurare con l'unità di misura; esso è composto dai seguenti elementi funzionali:

- un **rivelatore (elemento sensibile)**, ovvero un oggetto sensibile alla grandezza da misurare;
- un **trasduttore**, ovvero un dispositivo che traduce le variazioni della grandezza caratteristica del rivelatore in quelle di un'altra grandezza più facilmente accessibile allo sperimentatore (*esempio*: grandezze meccaniche → elettriche);
- un **dispositivo di visualizzazione (elemento di uscita della misura)** per presentare il risultato.

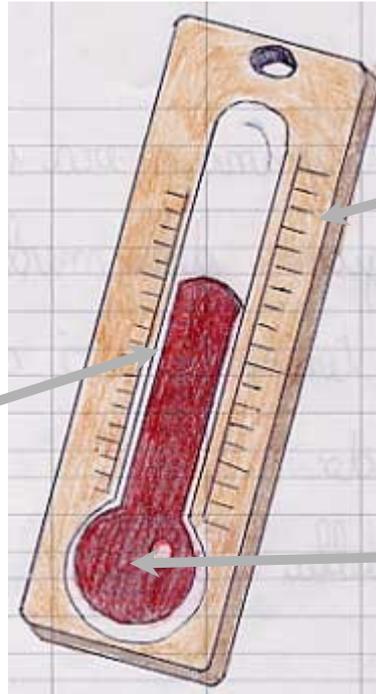
la grandezza **G** da misurare viene confrontata con il campione di unità di misura **U**; il risultato della misurazione viene presentato in uscita dallo strumento in una nuova grandezza **M** di facile lettura (ad es. lo spostamento di un indice su una scala graduata)



Lo strumento di misura

Esempio:
il termometro a mercurio

Trasduttore:
Tubo capillare a sezione costante che traduce le variazioni di volume in variazioni della lunghezza della colonna di liquido



Visualizzatore:
la scala graduata

Rivelatore (elemento sensibile alla temperatura) :
mercurio

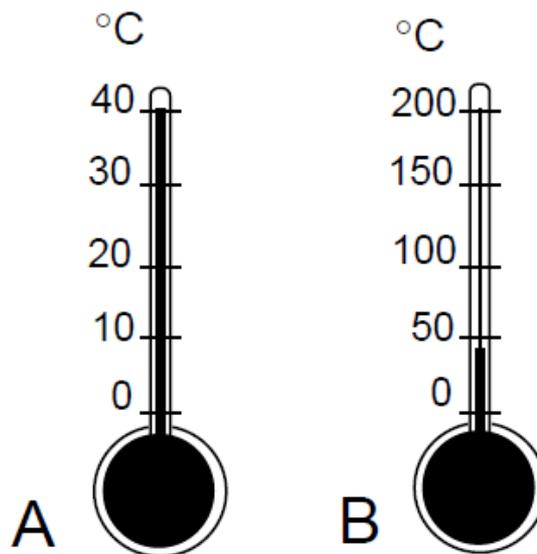
Caratteristiche degli strumenti di misura

- La prontezza: è determinata dal tempo necessario perchè lo strumento risponda ad una variazione della sollecitazione; ad esempio, per avere una risposta corretta da un termometro si deve attendere che si raggiunga l'equilibrio termico tra il rivelatore e l'oggetto di cui si misura la temperatura.
- L'intervallo d'uso: è definito come l'insieme dei valori compresi tra la *soglia* e la *portata* dello strumento, cioè tra il minimo ed il massimo valore della grandezza che lo strumento può apprezzare in un singolo atto di misura.
- La sensibilità: si può definire come il reciproco della incertezza di lettura propria dello strumento, cioè della più piccola variazione della grandezza che può essere letta sulla scala, e che si assume generalmente corrispondente alla più piccola divisione della scala stessa—o ad una frazione apprezzabile di questa.

Sensibilità

E' il rapporto $\Delta Z / \Delta X$ della variazione della grandezza M in uscita dello strumento e corrispondente variazione dei valori X della grandezza G in ingresso.

Si parla di soglia di sensibilità per il più piccolo valore della grandezza G in ingresso capace di provocare una variazione della grandezza M in uscita.



Linearità

Uno strumento è detto **lineare** quando la curva di risposta, cioè la relazione che collega i valori Z della grandezza M in uscita ai valori X della grandezza G in ingresso, è lineare.

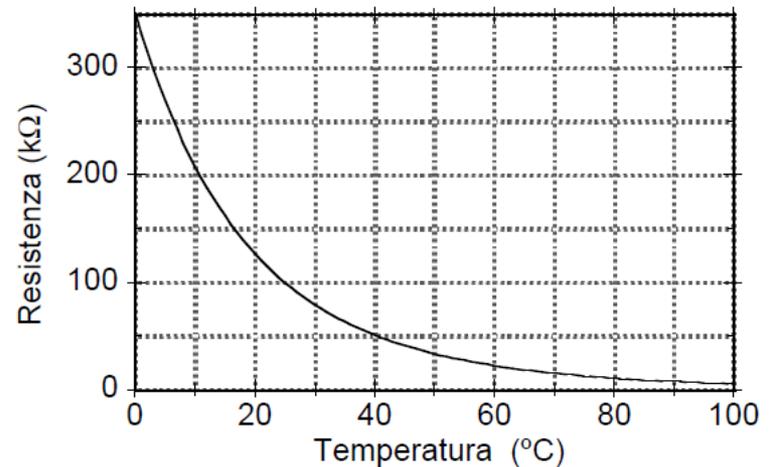
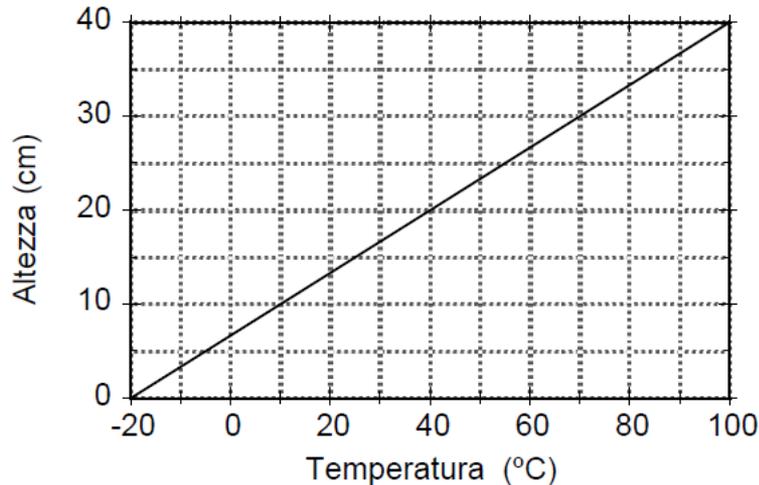


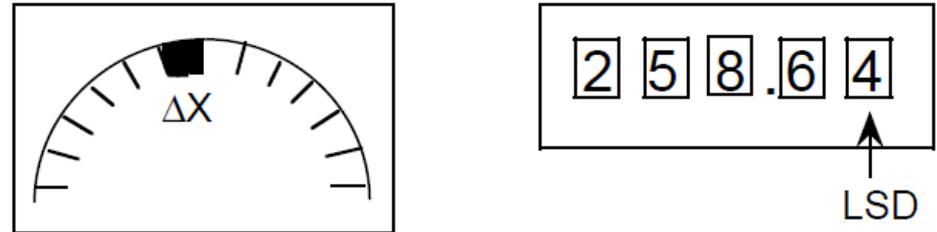
Fig. 3.4 – Nel termometro a mercurio (a sinistra) la relazione tra temperatura e altezza della colonnina è lineare. In un termometro con sonda a semiconduttore (a destra) la relazione tra temperatura e resistenza elettrica non è lineare.

Risoluzione

La risoluzione di uno strumento rappresenta la minima variazione ΔX della grandezza da misurare che provoca il minimo spostamento ΔZ “avvertibile” nell’indice dello strumento.

La risoluzione rappresenta il valore dell'ultima cifra significativa ottenibile. Un medesimo strumento (ad esempio multimetro) ha spesso la possibilità di scegliere tra diverse scale di sensibilità.

Fig. 3.5 – Risoluzione di lettura di uno strumento analogico (a sinistra) e di uno strumento digitale (a destra).



N.B. In generale, il risultato di una misura fornisce un valore $m \in (m-\delta, m+\delta)$. Ripetendo n volte la stessa misura si ottengono m_1, \dots, m_n risultati appartenenti a n intervalli, in generale non coincidenti.

Se $m_1 = m_2 = \dots = m$, lo strumento ha **sensibilità troppo bassa**.

Precisione

E' legata alla riproducibilità del risultato.

Accuratezza

L'accuratezza esprime invece l'assenza di errori sistematici nella misura: una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza.

NOTA: In passato, specie nel mondo anglosassone o nell'ambiente elettrico-elettronico, il termine accuratezza era sinonimo di precisione. Nella moderna metrologia i termini indicano concetti differenti, e l'accostamento deve pertanto essere evitato.

Accuratezza e precisione

L'accuratezza della misura è il grado di concordanza tra un valore desunto attraverso una o più misure e il relativo valore vero.

L'errore che deriva dallo **scostamento** tra il valore misurato e il valore vero è chiamato **errore d'accuratezza** (o semplicemente accuratezza).

La precisione è invece legata alla riproducibilità del risultato della misura di una stessa grandezza.

Precisione di uno strumento di misura è il grado di concordanza fra i risultati di successive misurazioni della stessa grandezza condotte in modo da rispettare tutte le condizioni seguenti:

- stesso metodo di misurazione
- stesso strumento di misurazione
- stesso osservatore
- stesso luogo
- stesse condizioni di utilizzazione
- ripetizione entro un breve periodo di tempo.

Per chiarire il concetto, si può fare riferimento all'analogia del tiro al bersaglio con una serie di frecce: più la serie di frecce tende a colpire il centro del bersaglio, più questa si definisce accurata. Nell'immagine a destra, gli esempi A e C rappresentano due rosate accurate, in quanto tutte e due tendono "mediamente" verso il centro del bersaglio.

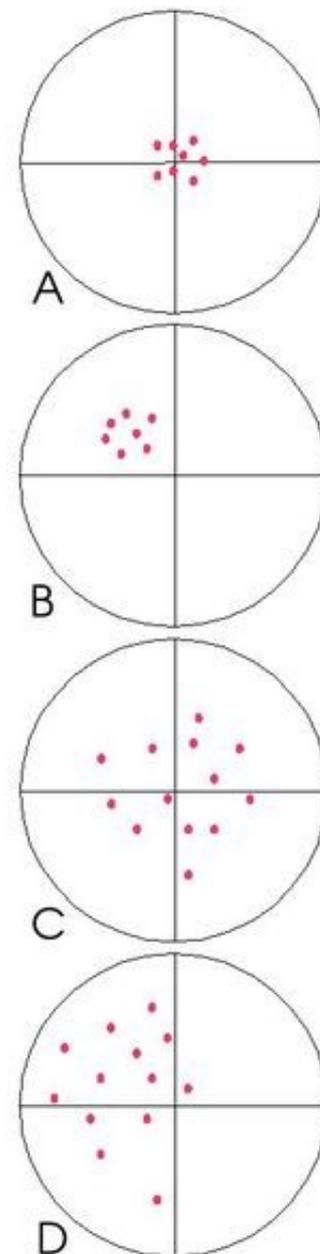
Tuttavia, mentre la rosata "A" si presenta circoscritta intorno al centro, la rosata "C" è dispersa su una larga superficie. La dispersione della serie di frecce non incide sull'accuratezza (cioè sulla "tendenza" delle frecce di andare verso il centro), ma è definibile in termini di scarsa precisione nel tiro.

La rosata B, pur essendo ripetibile, non si presenta accurata, in quanto non tende a colpire il centro del bersaglio. Lo scostamento del tiro, costante e ripetibile, evidenzia un errore sistematico nel lancio delle frecce.

L'esempio D mostra il caso peggiore, in cui i risultati sono, sia non accurati, che imprecisi.

L'accuratezza può essere migliorata con una calibratura, che permette di ridurre l'errore.

La precisione non può essere migliorata con una calibratura, perchè è una qualità intrinseca dello strumento e di come questo è stato costruito.



Errori di misura

Come accennato in relazione alla precisione di uno strumento, se si esegue una misura di una qualsiasi grandezza fisica si commettono inevitabilmente errori; conseguentemente il valore ottenuto per la grandezza misurata non è mai esattamente eguale al suo vero valore, che non sarà perciò mai noto con precisione arbitrariamente grande (diversamente da quanto accade con una costante matematica, come ad esempio π).

La misura di una grandezza fisica viene generalmente espressa nella forma:

$$X = X_0 \pm \delta X,$$

dove X_0 è un valore centrale che individua la posizione dell'intervallo di valori sull'asse X e δX è l'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura.

$$\delta X = \Delta X / 2$$

Valore vero di una misura?

Se si esegue più volte la misura di una stessa quantità, **si ottengono risultati diversi.**

Due casi:

Il misurando varia nel tempo

Il misurando non varia nel tempo

Non varia l'approccio metodologico:

Trattamento statistico

Teoria degli errori

TEORIA degli ERRORI

Teoria degli errori

La “teoria degli errori” aiuta a valutare e minimizzare gli errori nei procedimenti di misura.

Problemi di questo tipo possono presentare aspetti e livelli di complicazione diversissimi, e quindi richiedere l’uso delle tecniche più svariate.

Errori assoluti e relativi

Errore assoluto

L'errore assoluto nella misura di una grandezza x si indica con il simbolo δx , è una quantità avente la stessa unità di misura della grandezza x e si ottiene dall'espressione seguente:

$$\delta x = \sqrt{(\delta x_{\text{cas}})^2 + (\delta x_{\text{sist}})^2}$$

dove δx_{cas} è l'errore assoluto di tipo casuale e δx_{sist} è l'errore assoluto di tipo sistematico.

Errore relativo

L'errore relativo nella misura di una grandezza di valore medio x_m si indica con il simbolo δx_{rel} , è un numero puro e si ottiene dall'espressione seguente:

$$\delta x_{\text{rel}} = \frac{\delta x}{|x_m|}$$

Es. Sapendo che $\delta x_{\text{rel}} = 0,02$ e che $x_m = 20,2$ cm si può determinare l'errore assoluto:

$$\delta x = x_m \cdot \delta x_{\text{rel}} = 20,2 \cdot 0,02 = 0,4 \text{ cm.}$$

Errori assoluti e relativi

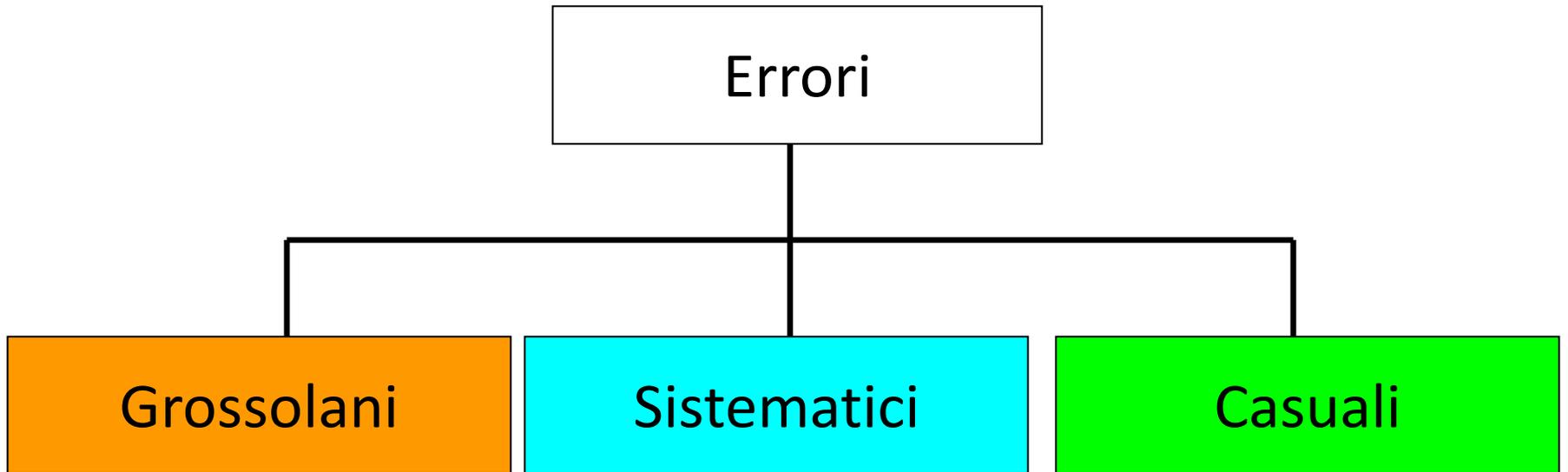
Errore relativo percentuale

L'errore relativo percentuale è l'errore relativo espresso in forma percentuale, si indica con il simbolo $\delta x_{\text{rel}}(\%)$ ed è quindi un numero puro che si ottiene dalla relazione seguente:

$$\delta x_{\text{rel}}(\%) = \frac{\delta x}{|x_m|} \cdot 100 = \delta x_{\text{rel}} \cdot 100$$

L'errore relativo è quello che consente di valutare la precisione di una misura (più è piccolo, più la misura è precisa) perché permette di confrontare l'accuratezza di misure diverse eseguite su grandezze eterogenee.

Classificazione degli errori



Errori grossolani

Possono essere causati da letture errate del visualizzatore, dall'uso improprio degli strumenti, da trascrizioni sbagliate del risultato o da imprecisioni nell'elaborazione numerica o nella rappresentazione

Sono spesso addebitabili alla distrazione o all'inesperienza

Possono essere eliminati conducendo le misure con cura ed attenzione

Errori casuali e sistematici

Errori casuali

Sono gli errori dovute a cause variabili in ogni singola operazione di misura, e quindi tendono a fornire valori a volte maggiori a volte minori del valore vero. Ad esempio: *l'errore di parallasse*, che si verifica quando dobbiamo leggere la posizione di un indice mobile su una scala graduata; *l'errore di interpolazione*, che si verifica quando cerchiamo di leggere un valore su una scala con una precisione maggiore di quella fornita dalle suddivisioni della scala stessa; *l'errore di sincronismo* compiuto nella misura della durata di un evento in cui il cronometro deve essere avviato/arrestato contemporaneamente all'inizio/fine dell'evento; *l'errore umano* nella procedura di misura; etc....

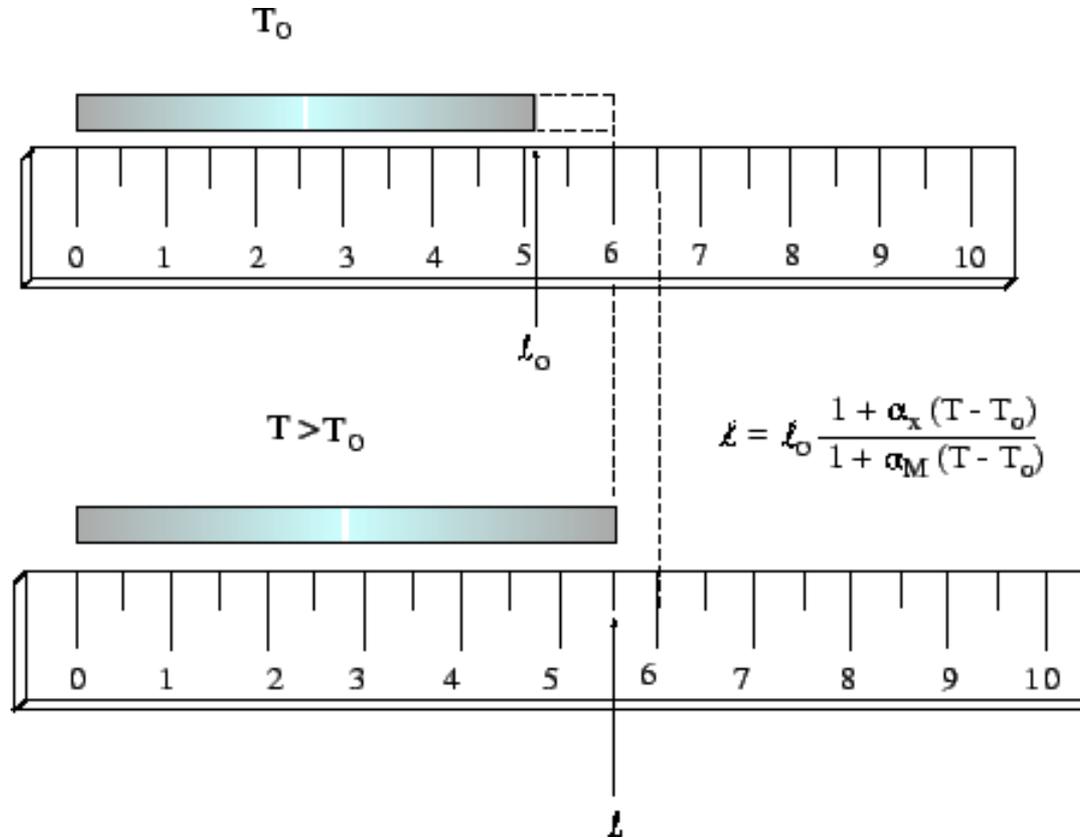
Gli errori casuali possono essere ridotti ripetendo più volte la misura.

Errori sistematici

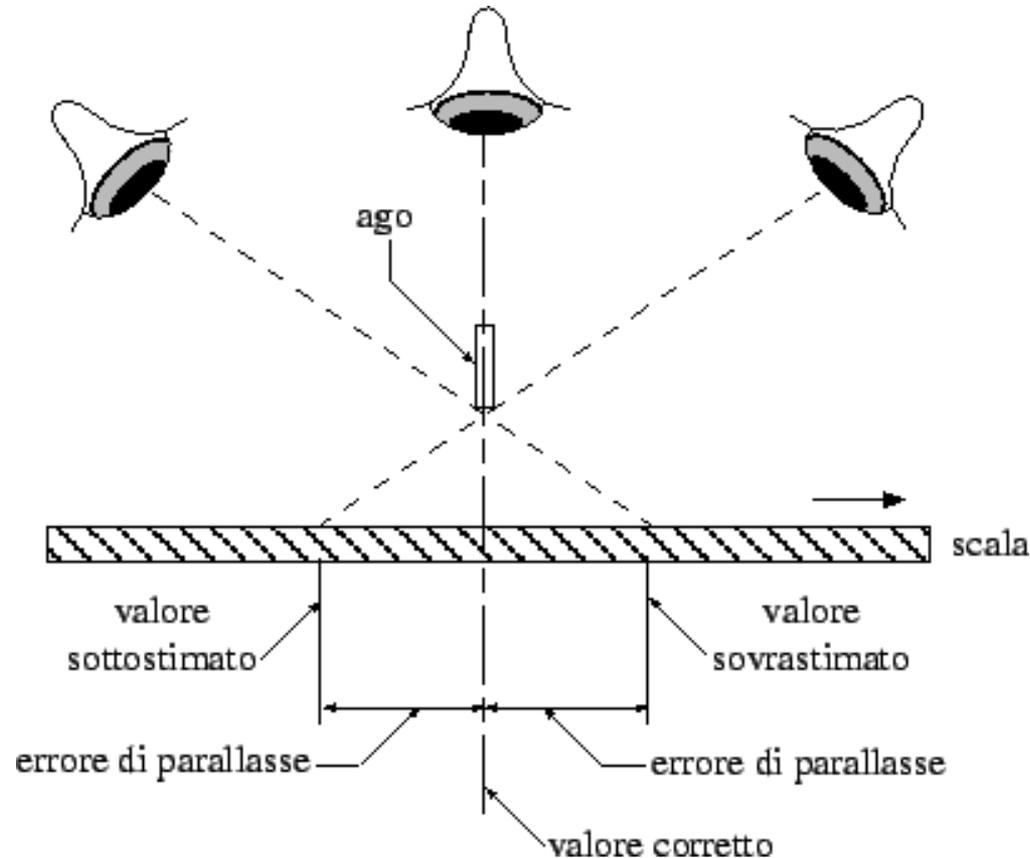
Sono gli errori dovuti a una causa ben precisa che si ripete costantemente in ogni operazione di misura; influiscono sul risultato della misura sempre nello stesso senso, fornendo un valore sempre più grande (o sempre più piccolo) di quello vero. Ad esempio: *gli errori strumentali* dovuti all'imprecisione sempre presente dello strumento; *gli errori umani*, come il tempo di reazione in un cronometraggio; gli errori insiti nella procedura sperimentale; etc..

Gli errori sistematici si possono ridurre usando strumenti di alta precisione e procedimenti di misura accurati.

Esempio di errore sistematico dovuto all'utilizzo di uno strumento a temperatura diversa da quella nominale.



Errore di parallasse



La figura mostra la diversa lettura che si ottiene osservando la scala dello strumento da angolazioni diverse. Gli strumenti di precisione hanno una porzione della scala riflettente allo scopo di minimizzare tale effetto.

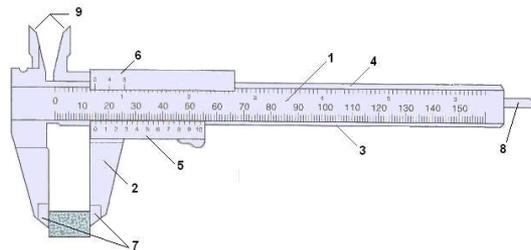
Principali cause di errori sistematici

4. *Perturbazioni esterne*; un esempio di errori di questo tipo è la presenza di corpi estranei, come la polvere, interposti tra le ganasce di un calibro e l'oggetto da misurare, il che porta a sovrastimarne lo spessore.

Un altro esempio è la misura della profondità del fondo marino o fluviale con uno scandaglio (filo a piombo) in presenza di corrente, la quale fa deviare il filo dalla verticale e porta sempre a sovrastimare la profondità se il fondo è orizzontale o quasi.

5. *Perturbazione del fenomeno osservato da parte dell'operazione di misura*. Tra gli errori di questo tipo si può citare la misura dello spessore di un oggetto con un calibro a cursore, o col più sensibile calibro a vite micrometrica (Palmer); l'operazione richiede l'accostamento delle ganasce dello strumento all'oggetto, ed in essa lo si comprime inevitabilmente con una forza sia pur piccola, e se ne provoca perciò una deformazione con leggera riduzione dello spessore.

6. *Uso di formule errate o approssimate nelle misure indirette*.



Errori casuali

Sono dovuti a variazioni casuali ed imprevedibili delle condizioni in cui si effettua la misura

Non possono mai essere completamente eliminati, ma il loro effetto si può ridurre usando le tecniche della statistica (ad esempio ripetendo più volte la misura ed effettuando la media dei valori ottenuti)

Incertezza

$$X = X_0 \pm \delta X,$$

