Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Tiziano Villa

28 Febbraio 2018

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	14	
problema 2	16	
totale	30	

1. (a) Si definisca la nozione di macchina a stati finiti nondeterministica.

   (b) Si definisca la nozione di equivalenza tra due macchine a stati finiti nondeterministiche.

   Traccia di soluzione.

   M_1 ed M_2 sono equivalenti se e solo se hanno i medesimi ingressi e uscite e e producono le medesime successioni d'ingressi/uscite.

   (c) Si definisca la nozione di raffinamento tra due macchine a stati finiti nondeterministiche.

   Traccia di soluzione.

   M_1 raffina M_2 se e solo se hanno i medesimi ingressi e uscite e le successioni d'ingressi/uscite prodotte da M_1 sono un sottoinsieme (proprio o no) di quelle di M_2.

   Si noti che le tre prime domande richiedevano le definizioni formali; non e' accettabile rispondere con caratterizzazioni del tipo A raffina B se A e' una simulazione di B etc. perche' cosi' non si definisce che cosa vuol dire raffinare ma si stabilisce un rapporto tra un concetto non definito (raffinamento) e un altro concetto non definito (simulazione).

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M':

- stati: s'_1, s'_2 con s'_1 stato iniziale;
- transizione da s'_1 a s'_1: $\bullet/\perp$,
  transizione da s'_1 a s'_2: $\bullet/0$,
  transizione da s'_2 a s'_2: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Macchina M'':

- stati: s''_1, s''_2 con s''_1 stato iniziale;
- transizione da s''_1 a s''_1: $\bullet/0, \bullet/\perp$,
  transizione da s''_1 a s''_2: $\bullet/0$,
  transizione da s''_2 a s''_2: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.
Traccia di soluzione.
M' e' pseudo-nondeterministica.
M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.
iii. Si trovi una simulazione di M' da parte di M'', se esiste.
Traccia di soluzione.
M'' simula M' come mostrato dalla relazione
$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2)\}$.
Alcuni hanno aggiunto (s'_2, s''_2), ma e' sbagliato perche' s''_1 non simula s'_2 per l'uscita 1 non producibile dal primo.
Si potrebbe aggiungere (s'_1, s''_2), ma non aiuterebbe nel tentativo di costruire la bisimulazione per la mancanza del simmetrico (s''_2, s'_1).
iv. Si trovi una simulazione di M'' da parte di M', se esiste.
Traccia di soluzione.
M' simula M'' come mostrato dalla relazione
$R_{M''-M'} = \{(s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_2, s'_2)\}$.
v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.
Traccia di soluzione.
Non c'e' una bisimulazione perche' l'unione delle due precedenti relazioni non e' simmetrica, dato che non e' presente la coppia (s'_2, s''_1).

vi. Si determinizzi la macchina $M^{''}$ e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $det(M^{''})$.
Traccia di soluzione.
Macchina $det(M^{''})$:
- stati: $\{s_1^{''}\}, \{s_1^{''}, s_2^{''}\}, \{s_2^{''}\}$ con $\{s_1^{''}\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s_1^{''}\}$ a $\{s_1^{''}\}$: $\bullet/\perp$,
  transizione da $\{s_1^{''}\}$ a $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$: $\bullet/0$,
  transizione da $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$ a $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$: $\bullet/0, \bullet/\perp$,
  transizione da $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$ a $\{s_2^{''}\}$: $\bullet/1$,
  transizione da $\{s_2^{''}\}$ a $\{s_2^{''}\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

vii. Si trovi una simulazione di $M^{'}$ da parte di $det(M^{''})$, se esiste.
Traccia di soluzione.
$det(M^{''})$ simula $M^{'}$ come mostrato dalla relazione
$R_{M'-det(M'')} = \{(s_1^{'}, \{s_1^{''}\}), (s_2^{'}, \{s_1^{''}, s_2^{''}\}), (s_2^{'}, \{s_2^{''}\})\}$.

viii. Si trovi una simulazione di $det(M^{''})$ da parte di $M^{'}$, se esiste.
Traccia di soluzione.
$M^{'}$ simula $det(M^{''})$ come mostrato dalla relazione
$R_{det(M'')-M'} = \{(\{s_1^{''}\}, s_1^{'}), (\{s_1^{''}, s_2^{''}\}, s_2^{'}), (\{s_2^{''}\}, s_2^{'})\}$.

ix. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine $M^{'}$ e $det(M^{''})$, se esiste.
Traccia di soluzione.
L'unione delle precedenti relazioni $R_{M'-det(M'')} \cup R_{det(M'')-M'} =$
$\{(s_1^{'}, \{s_1^{''}\}), (s_2^{'}, \{s_1^{''}, s_2^{''}\}), (s_2^{'}, \{s_2^{''}\}), (\{s_1^{''}\}, s_1^{'}), (\{s_1^{''}, s_2^{''}\}, s_2^{'}), (\{s_2^{''}\}, s_2^{'})\}$
e' simmetrica, quindi costituisce una bisimulazione tra $M^{'}$ e $det(M^{''})$.

x. Si commentino i risultati precedenti.
Traccia di risposta.
$M^{'}$ e $M^{''}$ sono esempi di macchine a stati finiti minimizzate equivalenti ($M^{'}$ raffina $M^{''}$ e $M^{''}$ raffina $M^{'}$), ma non isomorfe (non sono bisimili).
Si ricordi che poiche' $M^{'}$ e' pseudo-nondeterministica e $M^{''}$ e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica, il fatto che $M^{''}$ simula $M^{'}$ implica che $M^{'}$ raffina $M^{''}$ (cioe' $M^{'}$ esibisce un sottoinsieme dei comportamenti di $M^{''}$); inoltre si ha che $M^{'}$ simula $M^{''}$ se e solo se $M^{''}$ raffina $M^{'}$.
Determinizzando gli stati di $M^{''}$ si ottiene una macchina $det(M^{''})$

pseudo-nondeterministica equivalente a $M^{''}$. Ne consegue che $M^{'}$ e $det(M^{''})$ sono bisimili, poiche' macchine pseudo-nondeterministiche sono equivalenti se e solo se sono bisimili.
Si noti che minimizzando gli stati di $det(M^{''})$ (si noti che $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$ e $\{s_2^{''}\}$ sono stati equivalenti) si ottiene una macchina a stati finiti isomorfa a $M^{'}$.

2. Si considerino i due seguenti automi definiti sull'alfabeto $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

   Automa G (impianto):

   - stati: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante;
   - transizione da 0 a 1: a_1,
     transizione da 0 a 3: a_2,
     transizione da 1 a 2: b_1,
     transizione da 1 a 4: a_2,
     transizione da 2 a 5: a_2,
     transizione da 3 a 4: a_1,
     transizione da 3 a 6: b_2,
     transizione da 4 a 5: b_1,
     transizione da 4 a 7: b_2,
     transizione da 5 a 8: b_2,
     transizione da 6 a 7: a_1,
     transizione da 7 a 8: b_1.

   Automa H_a (specifica):

   - stati: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante;
   - transizione da 0 a 1: a_1,
     transizione da 0 a 3: a_2,
     transizione da 1 a 2: b_1,
     transizione da 1 a 9: a_2,
     transizione da 2 a 5: a_2,
     transizione da 3 a 4: a_1,
     transizione da 3 a 6: b_2,
     transizione da 4 a 7: b_2,
     transizione da 5 a 8: b_2,
     transizione da 6 a 7: a_1,
     transizione da 7 a 8: b_1,
     transizione da 9 a 5: b_1.

   (a) Si disegnino i grafi dei due automi.

(b) Dati i linguaggi K e $M = \overline{M}$ sull'alfabeto E. Sia $E_{uc} \subseteq E$.
Si scriva la definizione di controllabilita' di K rispetto a M e E_{uc}.
Traccia di soluzione.
Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E, con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc}, se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K},$$

che e' equivalente a

$$\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}.$$

(c) Siano $M = \mathcal{L}(G)$ e $K = \mathcal{L}_m(H_a)$. Sia $E_c = E_o = E$.
K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} ? Lo si dimostri applicando la definizione di controllabilita'.
Si risponda preliminarmente a questa domanda: $L\emptyset = \emptyset L =?$ (dove L e' un linguaggio qualsiasi, $\emptyset$ e' il linguaggio vuoto, e i due sono concatenati in un ordine o nell'altro).
Esiste un supervisore S_1 che realizza il linguaggio ammissibile H_a, cioe' tale che $\mathcal{L}(S_1/G) = \mathcal{L}(H_a)$ e $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}_m(H_a)$?
Se si, si proponga una strategia di controllo.
Traccia di soluzione.
Si risponde preliminarmente che $L\emptyset = \emptyset L = \emptyset$ come ripreso dopo. A proposito di $E_{uc} = \emptyset$, molti hanno confuso l'insieme vuoto $\{\} = \emptyset$ con l'insieme che contiene la stringa di lunghezza zero $\{\epsilon\}$, che non e' vuoto perche' contiene un elemento, appunto la stringa ϵ di lunghezza zero (che in ogni caso non e' un simbolo dell'alfabeto degli eventi).
Dimostriamo che esiste un supervisore S_1 non-bloccante, che e' quanto implicano le due condizioni $\mathcal{L}(S_1/G) = \mathcal{L}(H_a)$ e $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}_m(H_a)$.
Per dimostrarlo, si deve applicare il teorema NCT che richiede di dimostrare che la condizione di controllabilita' e' vera (sufficiente a garantire l'esistenza di un supervisore), e che vale la condizione di $\mathcal{L}_m(G)$-chiusura (sufficiente a garantire che non e' bloccante).
Prima dimostriamo che la condizione di controllabilita' e' vera, cioe' che

$$\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K} = \overline{K}\emptyset \cap \mathcal{L}(G) \subseteq \overline{K}.$$

Nel nostro caso $E_{uc} = \emptyset$, per cui si deve dimostrare la condizione $\overline{K}\emptyset \cap \mathcal{L}(G) \subseteq \overline{K}$ che usando $L\emptyset = \emptyset$ si riduce a $\emptyset \cap \mathcal{L}(G) \subseteq \overline{K}$ e quindi a $\emptyset \subseteq \overline{K}$ che e' vero per logica (l'insieme vuoto e' un sottoinsieme di ogni insieme). Percio' esiste un supervisore S_1 tale che $\mathcal{L}(S_1/G) = \mathcal{L}(H_a)$.
Inoltre si deve dimostrare la condizione di $\mathcal{L}_m(G)$-chiusura

$$K = \overline{K} \cap \mathcal{L}_m(G),$$

cioe' che

$$\mathcal{L}_m(H_a) = \mathcal{L}(H_a) \cap \mathcal{L}_m(G),$$

ma essa e' vera per costruzione dell'esempio (cioe' nel nostro esempio gli stati marcati della specifica H_a coincidono con gli stati della specifica che sono marcati nell'impianto G, per cui il linguaggio marcato della specifica coincide con il linguaggio marcato dell'impianto che sta nella specifica cioe' con l'intersezione del linguaggio marcato dell'impianto e del linguaggio della specifica).
A questo punto abbiamo finito perche' il teorema NCT ci garantisce che $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}_m(H_a)$. Per esercizio, possiamo rifare i passaggi per cui il teorema NCT dalla proprieta' di $\mathcal{L}_m(G)$-chiusura arriva a $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}_m(H_a)$.
Per definizione $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}(S_1/G) \cap \mathcal{L}_m(G)$, da cui sostituendo $\mathcal{L}(S_1/G) = \mathcal{L}(H_a)$ si ha $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}(H_a) \cap \mathcal{L}_m(G) = \mathcal{L}_m(H_a)$ (l'ultima uguaglianza e' la proprieta precedente della $\mathcal{L}_m(G)$-chiusura), cioe' riassumendo $\mathcal{L}_m(S_1/G) = \mathcal{L}_m(H_a)$ che e' la seconda proprieta' richiesta.
Quindi esiste un supervisore non-bloccante S_1 la cui strategia di supervisione e' quella gia' vista quando non si considerava se fosse non-bloccante: S_1 disabilita b_1 nello stato 4, S_1 disabilita b_2 nello stato 9, altrimenti S_1 abilita tutti gli eventi previsti da G.

(d) Si definisca il sottolinguaggio controllabile massimo $K^{\uparrow C}$.

Traccia di soluzione.

Sia $\mathcal{CC}_{in}(K)$ la collezione dei sottolinguaggi controllabili di K, allora si definisce

$$K^{\uparrow C} = \bigcup_{L \in \mathcal{CC}_{in}(K)} L.$$

(e) Siano $M = \mathcal{L}(G)$ e $K = \mathcal{L}_m(H_a)$.

Siano $E_c = \{a_1, b_1\}$, $E_o = E$.

K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} ?

Se si, si proponga una strategia di controllo.

Se no, si calcoli $K^{\uparrow C}$, costruendo l'automa prodotto $H_a \times G$ e applicando l'algoritmo di rimozione/potatura dell'automa prodotto.

Traccia di soluzione.

No.

Controesempio: sia $s = a_1 a_2 \in \overline{K}$, allora $s\sigma = a_1 a_2 b_2 \in M, \notin \overline{K}$.

L'automa prodotto sara' isomorfo ad H_a, a parte la ridenominazione degli stati: gli stati da 0 a 8 di H_a saranno ridenominati con le coppie corrispondenti da $(0,0)$ a $(8,8)$ e lo stato 9 sara' ridenominato come $(9,4)$. Confrontando gl'insiemi di eventi attivi di $H_a \times G$ e G si ricava che: nello stato $(9,4)$ l'evento b_2 e' disabilitato in $H_a \times G$ ma e' abilitato in G, da cui si deduce che K non e' controllabile dato che b_2 non puo' essere disabilitato.

Per calcolare $K^{\uparrow C}$ con l'automa prodotto si effettuano le seguenti eliminazioni:

- Si rimuove lo stato $(9,4)$ e gli archi uscenti ed entranti per il motivo detto sopra.
- Si rimuove lo stato $(1,1)$ e gli archi uscenti ed entranti perche' nel passo precedente si e' rimosso l'arco uscente da $(1,1)$ etichettato con l'incontrollabile a_2 (abilitato in 1 in G); si eliminano gli stati irraggiungibili $(2,2)$ e $(5,5)$.

L'automa prodotto rimanente riconosce le due stringhe $\{a_2 b_2 a_1 b_1, a_2 a_1 b_2 b_1\}$, percio' $K^{\uparrow C} = \{a_2 b_2 a_1 b_1, a_2 a_1 b_2 b_1\}$.

(f) Si ripeta l'esercizio del punto precedente con $E_c = \{b_1\}, E_o = E$.

Traccia di soluzione.

Si ripete la costruzione ed eliminazione precedente. Dopo la rimozione dello stato $(1,1)$ e degli archi uscenti ed entranti, si nota che si e' rimosso l'arco uscente da $(0,0)$ etichettato con l'incontrollabile a_1 (abilitato in 0 in G) e quindi che deve essere rimosso anche lo stato iniziale $(0,0)$, per cui la procedura ottiene come risultato l'eliminazione dell'intero automa cui corrisponde il linguaggio vuoto. Quindi

$$K^{\uparrow C} = \emptyset.$$

(g) Si definisca il sovralinguaggio controllabile chiuso al prefisso minimo $K^{\downarrow C}$.

Traccia di soluzione.

Sia $\mathcal{CC}_{out}(K)$ la collezione dei sovralinguaggi di K chiusi rispetto al prefisso e controllabili, allora si definisce

$$K^{\downarrow C} = \bigcap_{L \in \mathcal{CC}_{out}(K)} L.$$

(h) Siano $M = \mathcal{L}(G)$ e $K = \mathcal{L}_m(H_a)$. Siano $E_c = \{a_1, b_1\}, E_o = E$.

Si consideri la formula chiusa

$$K^{\downarrow C} \ = \ \overline{K} E_{uc}^{\star} \cap M.$$

Per $K = \mathcal{L}_m(H_a)$, si calcoli $K^{\downarrow C}$.

Traccia di soluzione.

Per rendere $\overline{K}$ controllabile si deve estendere la stringa $a_1 a_2$ con una stringa di eventi incontrollabili di lunghezza 1, cioe' con b_2 perche' non ci sono altre continuazioni possibili di stringhe di $\overline{K}$ con eventi incontrollabili che siano (le stringhe estese) contenute in M. Percio'

$$K^{\downarrow C} \ = \overline{K} \cup \{a_1 a_2 b_2\}.$$

Pur se il ragionamento proposto e' corretto, la strada sicura per ottenere il risultato e' quella di costruire $\overline{K} E_{uc}^{\star} \cap M$ pezzo per pezzo che e' il procedimento richiesto allo studente.