Elaborazione di segnali e immagini: modulo segnali

30 gennaio 2014

Esame parziale con soluzioni

Esercizio 1

Dato un sistema LTI descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$2v(k) + v(k-1) - 10v(k-2) = 2u(k) + u(k-1) \qquad (1)$$

in cui $u(k) = \delta_{-1}(k)$ e le condizioni iniziali $v(-1) = 0$ e $v(-2) = 1$.

(i) Determinare la risposta libera e la stabilità asintotica.

(ii) Calcolare la risposta impulsiva e studiare la stabilità BIBO.

(iii) Scrivere la risposta complessiva del sistema nel dominio temporale.

Soluzione:

(i) L'equazione caratteristica: $2z^2+z-10 = 0$ ha le soluzioni $z_1 = 2$ e $z_2 = -2,5$.

La risposta libera è la combinazione lineare dei modi elementari 2^k e $(-2,5)^k$:

$v_l(k) = \alpha 2^k + \beta(-2,5)^k$

Dalle condizioni iniziali si ottiene: $\alpha = \dfrac{20}{9}$ e $\beta = \dfrac{25}{9}$

Il sistema non è asintoticamente stabile in quanto il modulo di entrambe le radici del polinomio caratteristico è superiore a 1.

(ii) Applicando la trasformata Z all'equazione iniziale, trascurando le condizioni iniziali abbiamo:

$V_f(z)(2z^2 + z - 10) = (2z^2 + z)U(z)$

Tenendo conto della relazione $V_f(z) = H(z)U(z)$, dove $H(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema, si ottiene:

$H(z) = \dfrac{2z^2 + z}{2z^2 + z - 10} \Rightarrow \dfrac{H(z)}{z} = \dfrac{2z + 1}{2(z - 2)(z + 2,5)}$.

$\dfrac{H(z)}{z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{A}{z - 2} + \dfrac{B}{z - 2,5})$.

Si ottiene $\dfrac{H(z)}{z} = \dfrac{5}{9}\dfrac{z}{z - 2} + \dfrac{4}{9}\dfrac{z}{z - 2,5}$

La risposta impulsiva è l'antitrasformata Z di $H(z)$:

$h(k) = \left[\frac{5}{9}2^k + \dfrac{4}{9}(-2,5)^k\right]\delta_{-1}(k)$

Il sistema non BIBO stabile in quanto la risposta impulsiva non è sommabile.

(iii) Per trovare la risposta totale dobbiamo prima calcolare la risposta forzata.

Applichiamo di nuovo $V_f(z) = H(z)U(z)$, dove $U(z) = \dfrac{z}{z - 1}$ la trasformata Z del gradino unitario.

Si ottiene $\dfrac{V_f(z)}{z} = \dfrac{2z^2 + z}{2(z - 1)(z - 2)(z + 2,5)}$.

Seguendo gli stessi ragionamenti del punto (ii) si ottiene:

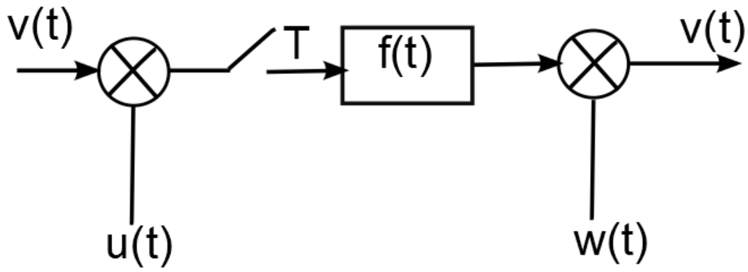
$v_f(k) = \left[\dfrac{10}{9}2^k + \dfrac{20}{63}(-2,5)^k - \dfrac{6}{7}\right]\delta_{-1}(k)$.

La risposta totale è la somma della risposta forzata e la risposta libera.

Esercizio 2

Siano dati $V(f) = \Pi\left(\frac{f-5}{2}\right) + 2\Pi\left(\frac{f-4}{3}\right)$ la trasformata di Fourier di un segnale v(t) e lo schema:

dove u(t) = $e^{j\omega_1 t}$, w(t) = $e^{j\omega_2 t}$, T il periodo di campionamento e f(t) il filtro passa basso ideale centrato in origine di ampiezza unitaria e risposta in frequenza F(f) = $\Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$.



Trovare una combinazione opportuna di valori per $\omega_1, \omega_2, f_L, T$ in modo da ottenere in uscita il segnale iniziale v(t).

Soluzione:

La risposta in frequenza del segnale $v(t)$ è ha lo spettro delle frequenze non nulle compreso tra 2,5 e 6 ed è centrato in 4,25.

Esempio di operazioni:

-traslazione in origine di $V(f)$, quindi modulazione con il fasore esponenziale di frequenza $f_1 = -4,25$, quindi $\omega_1 = -8,5\Pi$.

-campionamento con $f_c > 2B = 3,5$, per esempio $f_c = 4 \Rightarrow T = \frac{1}{4} \Rightarrow$ la replica dello spettro senza aliasing.

-filtraggio con $2f_L$ compreso tra 3,5 e 4, quindi per esempio $f_L = 2$.

Si ottiene nuovamente il segnale originale con lo spettro traslato in origine perciò l'ultima operazione sarà la modulazione con il fasore $w(t)$ di frequenza $f_2 = 4,25$ e pulsazione $\omega_2 = 8,5\Pi$.

Osservazione: scegliendo una frequenza di campionamento $f_c > 2B$, dove in questo caso $B = 6$ è la banda passante del segnale $v(t)$, e un filtro passa basso con $6 < f_L < f_c - 6$ (vedi il teorema di campionamento ideale), avremmo potuto tenere $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = 0$.

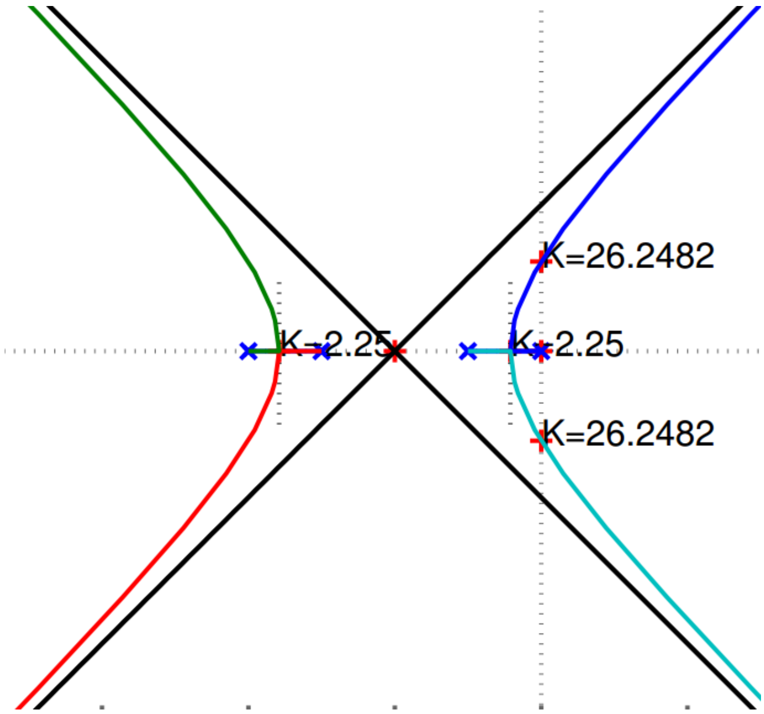
Esercizio 3 Tracciare il luogo delle radici della seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}, K > 0. \qquad (2)$$

(i) Calcolare le coordinate della pulsazione corrispondente all'intersezione con l'asse immaginario.

(ii) Calcolare il margine di guadagno considerando il fattore di guadagno del progetto $K_{progetto} = 10$.

Soluzione:



Il numero dei poli (4) fornisce il numero dei rami (4) e il loro valore fornisce la parte reale del luogo delle radici (tra -4 e -3 e tra -1 e 0).

Gli asintoti (4) sono centrati nel punto $\sigma_c = -2$ e formano gli angoli 45, 135, 225, 315 gradi con l'asse reale positiva.

I punti di biforcazione si trovano risolvendo la seguente equazione:

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + 1} + \frac{1}{\sigma_b + 3} + \frac{1}{\sigma_b + 4} = 0$$
$$\Longrightarrow 2\sigma_b^3 + 12\sigma_b^2 + 19\sigma_b + 6 = 0.$$

Le radici intere di questa equazione si trovano tra i divisori di 6 e -2 una radice.

Dividendo il polinomio $2\sigma_b^3 + 12\sigma_b^2 + 19\sigma_b + 6$ a $\sigma_b + 2$, rimane da risolvere un equazione di secondo grado.

L'insieme dei punti di biforcazione è: $\{-2; -0,42, -3,58\}$.

Per calcolare l'intersezione con l'asse immaginario si deve trovare la soluzione $s = j\omega$ (con la parte reale nulla) dell'equazione:

$s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s + k = 0$

Sostituendo abbiamo:

$(\omega^4 - 19\omega^2 + k) + j(-8\omega^3 + 12) = 0$

Si ottengono due equazioni:

$(\omega^4 - 19\omega^2 + k) = 0$ e $(-8\omega^3 + 12) = 0$, che hanno le soluzioni:

$\omega = 0; \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ e $K = 0; 26,25$.

Tenendo conto che $K > 0$ l'unica soluzione per K è 26,25.

Il margine di guadagno è il rapporto tra il K trovato e il valore di K di progetto, quindi 2,625.