Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 12
22 gennaio 2015

Gli esercizi seguenti sono dedicati alle *formule di Cardano-Tartaglia-Del Ferro* per la risoluzione di un'equazione cubica. Su un campo K di caratteristica zero che contenga una radice primitiva terza dell'unità $z \in E_3(K)$, consideriamo il polinomio

$$f = x^3 + px + q \in K[x].$$

Siano E un campo di riducibilità completa di f su K e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E$ gli zeri di f.
Siano inoltre

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) \in E$$
$$\Delta = \delta^2 = -4p^3 - 27q^2 \in K$$

dove Δ è il discriminante di f.

1. Si verifichi che:

   (a) Le funzioni elementari simmetriche $\tilde{s_1}, \tilde{s_2}, \tilde{s_3}$ nelle variabili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soddisfano
   $\tilde{s_1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$
   $\tilde{s_2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = p$
   $\tilde{s_3} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q$

   (b) $\delta = {\alpha_1}^2\alpha_2 + {\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_3}^2\alpha_1 - {\alpha_1}^2\alpha_3 - {\alpha_2}^2\alpha_1 - {\alpha_3}^2\alpha_2$

   (c) $3(z-z^2)\delta - 3\sum_{i\neq j} {\alpha_i}^2\alpha_j = 6z({\alpha_1}^2\alpha_2 + {\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_3}^2\alpha_1) + 6z^2({\alpha_1}^2\alpha_3 + {\alpha_2}^2\alpha_1 + {\alpha_3}^2\alpha_2)$

2. Consideriamo gli elementi

   $$\alpha = \alpha_1 + z\alpha_2 + z^2\alpha_3, \quad \beta = \alpha_1 + z^2\alpha_2 + z\alpha_3 \in E$$

   Si verifichi che:

   (a) $2\alpha^3 + 27q = 3(z - z^2)\delta, \quad 2\beta^3 + 27q = -3(z - z^2)\delta \quad$ e $\quad \alpha\beta = -3p.$

   (b) Gli elementi $a = \frac{\alpha^3}{27},\ b = \frac{\beta^3}{27}$ appartengono a $K(\delta)$ e sono gli zeri del polinomio

   $$g = x^2 + qx - (\tfrac{p}{3})^3 \in K[x].$$

3. Esistono $u, v \in E$ tali che l'elemento u è una radice terza di $a \in K(\delta)$, l'elemento v una radice terza di $b \in K(\delta)$ e $3uv = -p$. In tal caso $u + v$ è uno zero di f e

   $$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{u + v,\ z^2u + zv,\ zu + z^2v\}$$

4. (a) Un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ ha tre zeri distinti in $\mathbb{R}$ se $\Delta > 0$, al più due zeri distinti in $\mathbb{R}$ se $\Delta = 0$, uno zero in $\mathbb{R}$ e due zeri coniugati in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se $\Delta < 0$.

   (b) Si trovino gli zeri del polinomio $x^3 - 2x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ e si determini $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$.

Gli esercizi seguenti sono dedicati alle formule risolutive per un'equazione di quarto grado $x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4 = 0$ su un campo F di caratteristica diversa da 2 e 3.

1. Si verifichi che, tramite un opportuno cambio di variabile, ci si riconduce all'equazione $f(y) = y^4 + py^2 + qy + r = 0$, con radici $y_1, y_, y_3, y_4$ tali che $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

2. Si consideri l'equazione $g(z) = z^3 - pz^2 + 4rz + 4pr - q^2 = 0$ (detta *risolvente cubica di* f). Si verifichi che le sue radici z_1, z_2, z_3 soddisfano le relazioni $z_1 = y_1y_2 + y_3y_4$, $z_2 = y_1y_3 + y_2y_4$, $z_3 = y_1y_4 + y_2y_3$.

3. Sia $V =< 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) >\leq S_4$. Si verifichi che V è un sottogruppo normale di $S_4 = \mathrm{Gal}(F(y_1, y_2, y_3, y_4)/F)$ e che $\mathrm{Fix}_F V = K$, con $K = F(z_1, z_2, z_3)$.

4. Sia $G = \{1, (12)(34)\} \leq V$. Si verifichi che G è un sottogruppo normale di V e che $\mathrm{Fix}_K G = F(y_1y_2, y_3y_4)$.

5. Si trovi il grado dell'estensione $[F(y_1, y_2, y_3, y_4) : F(y_1y_2, y_3y_4)]$ e $[F(y_1y_2, y_3y_4) : K]$.

6. Si verifichi che $(x - y_1y_2)(x - y_3y_4) = x^2 - z_1x + r$ e $(x - (y_1 + y_2))(x - (y_3 + y_4)) = x^2 + z_3z_4$.

7. Si trovino formule per y_1, y_2, y_3 e y_4 in termini di z_1, z_2 e z_3 e di radici quadrate di elementi di K.

8. Ricordando le formule risolutive per le equazioni di terzo grado, si trovino gli zeri del polinomio $x^4 - 2x^3 - 8x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.